UFF – Departamento de Análise
GAN00007 – Introdução à Álgebra Linear – B1 – 2014.1 – Prof^a^. Ana Maria Luz

Lista de Exercícios 11 – Resolução

1.

a) Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais. (V)

b) Se A é uma matriz simétrica com todos os seus autovalores distintos então A não é diagonalizável. (F) . **O correto é**: Se A é uma matriz simétrica com todos os seus autovalores distintos então A é diagonalizável

c) Se A é uma matriz simétrica, então autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. (V)

d) Se uma matiz simética A tem um autovalor λ_j com multiplicidade k_j então o espaço solução do sistema linear $(\lambda_j I_n - A)x=0$ (o autoespaço de λ_j) tem dimensão k_j. (V)

e) Se A é uma matriz simétrica então não existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP=D$, onde D é uma matriz diagonal com os autovalores de A como elementos da diagonal principal. (F) **O correto é**: Se A é uma matriz simétrica então existe uma matriz ortogonal P...

2. Seja o operador linear $T:\Re^2 \to \Re^2$ tal que T(x,y) = (x + y, x –y).
   (a) Determine $[T]_B$, onde B = {(1,2), (0,1)}.
   (b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado v = (5, 3).

Solução. (a) T(1,2)=(3,-1), T(0,1)=(1,-1); (x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1)

T(1,2) = (3,-1) = 3(1,2) + (-7)(0,1)

T(0,1) = (1,-1) = 1(1,2) + (-3)(0,1). Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) Como, $[v]_B=\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, $[T(v)]_B=[T]_B[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$.

3. Verificar se o operador linear $T:\Re^3 \to \Re^3$ definido por T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) e T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1) é inversível, e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Solução. Observe que o conjunto {(1, 1, 1), (-2, 1, 0), (-1, -3, -2)} é uma base de $\Re^3$ e T está bem definido, pois conhecemos suas imagens. Então, por definição de

T^{-1}, $T^{-1}(1, 0, 0) = T^{-1}(x, y, z) = x\,T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1)$.

Observando que {(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 1, -1)} é também uma base de $\Re^3$, pois são LI ($\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$ e que as imagens desses vetores são conhecidas, o operador T^{-1} está definido. Logo, existindo a T^{-1}, T é inversível.

Vamos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Expressando (x, y, z) em relação a esta base,

(x, y, z) = x(1, 0, 0) + (-y-z)(0, -1, 0) + (-z)(0, 1, -1), logo,

$T^{-1}(x, y, z) = x\,T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1)$

$T^{-1}(x, y, z) = x\,(1, 1, 1) + (-y-z)\,(-2, 1, 0) + (-z)\,(-1, -3, -2)$

$T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y + 2z, x + 2z)$.

4. Mostrar que o operador linear, no $\Re^3$, definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível. Determinar $v \in \Re^3$ tal que $T(v) = (6, 9, 15)$.

Solução. Como det $[T] = 0$, T não é inversível.

Se $v = (x, y, z)$, $[T(v)] = [T].\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$. Daí,

$v = (z, 3 - 2z, z)$, $z \in \Re$.

5. A base B é obtida da base canônica A do $\Re^2$ pela rotação de $\frac{\pi}{3}$rad. Calcular:

a) $[I]_B^A$ b) $[I]_A^B$

Solução. Se $B = (b_1, b_2)$, $b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ e $b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $(1,\ 0) = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(0, 1) = c\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + d\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $d = \frac{1}{2}$. Logo, $[I]_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; [I]_A^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A={(1, 3), (2, -4)} determine a base B.

Solução. $B = \{(a,b),(c,d)\}$

(1, 3) = -7(a,b) – 11(c,d), (2,-4) = 6(a,b) + 8(c,d). Logo, B={(3,-2), (-2,1)}.

7. Verifique se o operador $T: \Re^2 \to \Re^2$, definido por T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y) é inversível. Caso seja encontre uma fórmula para seu inverso.

Solução. Sendo [T]=$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, det[T]=-1 $\neq 0$. Logo, T é inversível.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow T^{-1}(x,y) = (-3x+5y,\ 2x-3y).$$

8. O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$ de modo que os autovalores são: λ_1=-2, λ_2=-2 e λ_3=4. Então -2 é um autovalor com multiplicidade 2. A seguir, para encontrar os autovetores associados a λ_1 e λ_2, resolve-se o sistema linear $(-2I_3-A)x=0$, uma base para o espaço solução deste sistema linear é $v_1=(-1,1,0)$ e $v_2=(-1,0,1)$, que não são ortogonais, podemos usar o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3-A)x=0$ (o autoespaço de λ_1=-2). De modo que obtemos $u_1=\left(1/\sqrt{2}\right)(-1,1,0)$ e $u_2=\left(1/\sqrt{6}\right)(-1,-1,2)$. O conjunto $\{u_1,u_2\}$ é uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3-A)x=0$. Além disso tem–se que $v_3=(1,1,1)$ é um autovetor associado a λ_3=4, normalizando este vetor obtemos $u_3=\left(1/\sqrt{3}\right)(1,1,1)$. Como autovalores associados a autovetores distintos são ortogonais temos que u_3 é ortogonal a u_1 e u_2. Logo $\{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base ortonormal para $\Re^3$. A matriz P cuja j-ésima coluna é u_j é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$ e é tal que $P^{-1}=P^T$ (P é ortogonal). Além disso

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [T]_\beta .$$

9. Como as matrizes em a) e b) são ortogonais basta achar as transpostas pois $A^T=A^{-1}$ e $B^T=B^{-1}$.