UFF – Instituto de Matemática e Estatística
GMA 00109 - Cálculo II A - Turma H1 - 2014.1– Prof^a. Ana Maria Luz

Aplicações de Integral

Considere as seguintes definições:

Integral Definida

Se f é uma função contínua definida em $a \le x \le b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam x_0 (= a), x_1, x_2, …, x_n (= b) as extremidades desses subintervalos, escolhemos os **pontos amostrais** x_1^*, x_2^*,…., x_n^* nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
Então a **integral definida de *f* de *a* a *b*** é

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

Regra do Ponto Médio:

Freqüentemente escolhemos o ponto amostral x_i^* como a extremidade direita do i-ésimo intervalo, pois isso é conveniente para o cálculo do limite. Porém, se o propósito for encontrar uma *aproximação* para uma integral, é geralmente melhor escolher x_i^* como o ponto médio do intervalo, o qual denotamos por $\overline{x}_i$. Qualquer soma de Riemann é uma aproximação para uma integral, mas se usarmos os pontos médios obteremos a seguinte aproximação:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x = \Delta x[f(\overline{x}_1) + \cdots + f(\overline{x}_n)]$$

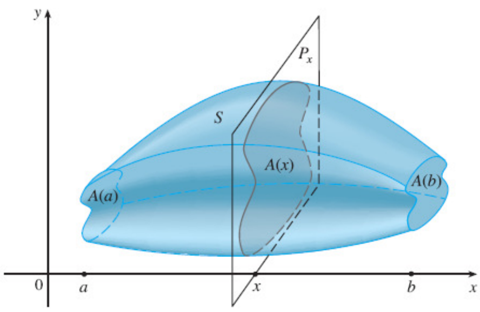
onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

e $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$

Definição de Volume:

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua (veja figura ao lado) então o **volume** de S é:

$$\boxed{V = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx}$$



Fonte: Stewart, J. Cálculo Vol. 1 5ª. Ed. São Paulo: Thomson, 2008.

Trabalho

Suponha que o objeto se mova ao longo do eixo x na direção positiva de $x = a$ até $x = b$. Em cada ponto x entre a e b uma força $f(x)$ atua no objeto, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades x_0, x_1, . . . , x_n e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto amostral x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a força naquele ponto é $f(x_i^*)$. Se n é grande, então Δx é pequeno, e como f é contínua, os valores de f não variam muito ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em outras palavras, f é praticamente constante no intervalo e então o trabalho W_i que é executado no movimento da partícula de x_{i-1} é dado aproximadamente pela equação

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Então, podemos aproximar o trabalho total por:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

A aproximação torna-se cada vez melhor quando n cresce. Portanto, definimos o **trabalho feito no movimento de um objeto de *a* a *b*** como o limite dessa quantidade quando $n \to \infty$. Como o lado direito da equação anterior é uma soma de Riemann, reconhecemos seu limite como uma integral definida e então:

$$\boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx}$$

Exercícios

1. Uma tomografia computadorizada produz vistas de seções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais provêem informações sobre esse órgão que de outra maneira só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e áreas de secções transversais, em cm^2 são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 30 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

2. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x do fim do tronco) estão listadas na tabela abaixo. Use a Regra do Ponto Médio com n=5 para estimar o volume do tronco.

x (m)	***A(m²)***	***x (m)***	***A(m²)***
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

3. Calcule o volume de um dos Donuts (figura (b)) considerando que ele pode ser representado como na figura (a) abaixo, ou seja, como um toro que é o sólido obtido pela rotação do círculo de raio r da figura (a) ao redor do eixo y.

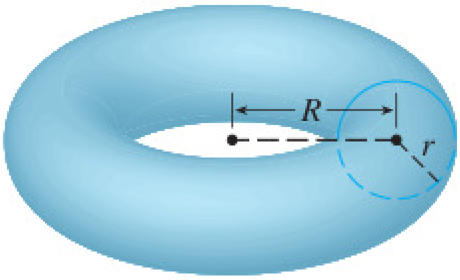


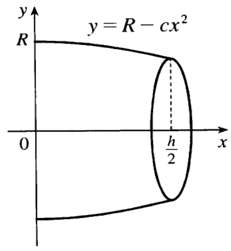
Figura (a)


Figura (b)

4. Uma tigela tem o formato de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela e, depois despeja-se água até uma profundidade de *h* centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

5. Alguns dos pioneiros do Cálculo, como Kepler e Newton foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou em 1715 *Stereometria doliorum*, um livro dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris). Eles freqüentemente aproximavam o formato dos lados por parábolas.

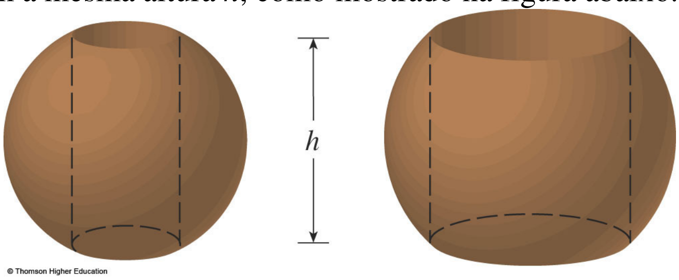
Por exemplo: um barril com altura *h* e o raio máximo *R* é construído pela rotação ao redor do eixo *x* da parábola $y=R-cx^2$, $-h/2 \le x \le h/2$, onde c é uma constante positiva (veja figura ao lado). Mostre que o volume interno do barril é:



$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right),$$

onde $r=R-d$ é o raio de cada extremo do barril e $d=ch^2/4$.

6. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura *h*, como mostrado na figura abaixo.



Verifique qual anel tem mais madeira. Use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio *r* através do centro de um esfera de raio *R* e expresse a resposta em termos de *h*.

7. Um cabo de 91 kg tem 31 metros de comprimento e está pendurado sobre a borda de um edifício alto. Qual o trabalho necessário para puxar o cabo para o topo do edifício?

8. A figura mostra um fio de alta tensão que está pendurado entre dois postes em $x=-b$ e $x=b$. Este tem o formato de uma catenária com equação $y=c+a\cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio. ($\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$)