UFF – Instituto de Matemática e Estatística
GMA 00109 - Cálculo II A - Turma H1 - 2014.1– Prof^a. Ana Maria Luz

Aplicações de Integral – RESOLUÇÃO

1. Uma tomografia computadorizada produz vistas de seções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais provêem informações sobre esse órgão que de outra maneira só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e áreas de secções transversais, em cm^2 são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 30 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

RESOLUÇÃO:

Existem 10 subintervalos sobre 15 cm, então usaremos n=10/2=5 para Regra do ponto Médio:

$$V = \int_0^{15} A(x)\,dx \approx M_5 = \tfrac{15-0}{5}[A(1.5) + A(4.5) + A(7.5) + A(10.5) + A(13.5)]$$
$$= 3(18 + 79 + 106 + 128 + 39) = 3 \cdot 370 = 1110 \text{ cm}^3$$

2. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x do fim do tronco) estão listadas na tabela abaixo. Use a Regra do Ponto Médio com n=5 para estimar o volume do tronco.

x (m)	*A(m^2)*	*x (m)*	*A(m^2)*
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

RESOLUÇÃO:

$$V = \int_0^{10} A(x)\,dx \approx M_5 = \tfrac{10-0}{5}[A(1) + A(3) + A(5) + A(7) + A(9)]$$
$$= 2(0.65 + 0.61 + 0.59 + 0.55 + 0.50) = 2(2.90) = 5.80 \text{ m}^3$$

3. Calcule o volume de um dos Donuts (figura (b)) considerando que ele pode ser representado como na figura (a) abaixo, ou seja, como um toro que é o sólido obtido pela rotação do círculo de raio r da figura (a) ao redor do eixo y.

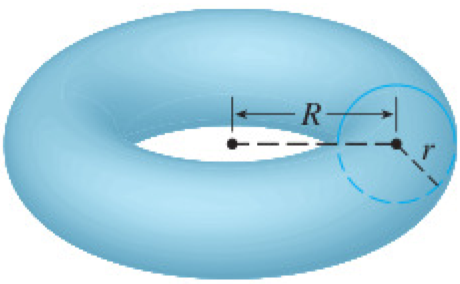
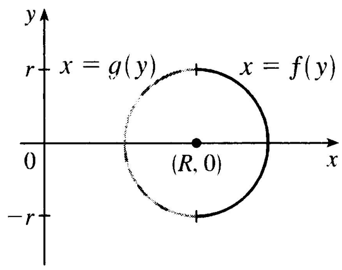


Figura (a)

Figura (b)

RESOLUÇÃO:

O toro é obtido pela rotação do círculo: $(x-R)^2+y^2=r^2$
em torno do eixo-y. Isolando o x obtemos uma função de y para o lado direito do círculo dada por $x=R+\sqrt{r^2-y^2}=f(y)$ e o lado esquerdo é dado por
$x=R-\sqrt{r^2-y^2}=g(y)$.



$$V=\pi\int_{-r}^{r}\{[f(y)]^2-[g(y)]^2\}\,dy$$
$$=2\pi\int_0^r\left[\left(R^2+2R\sqrt{r^2-y^2}+r^2-y^2\right)-\left(R^2-2R\sqrt{r^2-y^2}+r^2-y^2\right)\right]dy$$
$$=2\pi\int_0^r 4R\sqrt{r^2-y^2}\,dy=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

Observe que a integral que aparece acima representa 1/4 da área de um círculo de raio r. Logo
$$8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy=8\pi R\cdot\tfrac{1}{4}\pi r^2=2\pi^2r^2R.$$

4. Uma tigela tem o formato de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela e, depois se despeja água até uma profundidade de *h* centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

RESOLUÇÃO:

Vamos considerar dois casos: um no qual a bola não está completamente submersa e ouro no qual esteja completamente submersa.

Caso 1: $0\le h\le 10$

Neste caso a vista superior da superfície da água contida na tigela está representada na região cinza da figura (a). Nos podemos calcular a área da superfície da água em uma altura- *x* acima do fundo da tigela usando o teorema de Pitágoras (ver figura (b)).

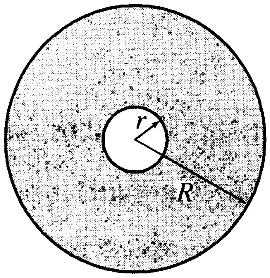


Figura (a)

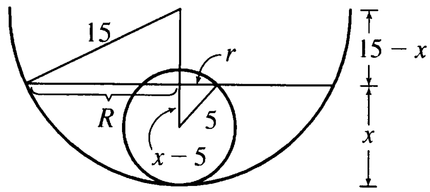


Figura (b)

$R^2=15^2-(15-x)^2 \quad r^2=5^2-(x-5)^2$,

então:
$$A(x)=\pi\left(R^2-r^2\right)=20\pi x.$$

O volume da água quando ela está a uma altura *h* é então:
$$V(h)=\int_0^h A(x)\,dx=\int_0^h 20\pi x\,dx=\left[10\pi x^2\right]_0^h=10\pi h^2\ \text{cm}^3,\ 0\le h\le 10.$$

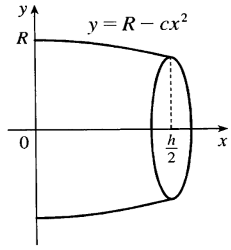
Caso 2: $10<h\le 15$

Neste caso o volume da água é obtido por se subtrair o volume de água deslocado pela bola do volume contido originalmente na tigela (que tem o formato de uma calota esférica). O volume de água numa calota esférica de raio r e altura h é (Verifique!) : $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$. Logo na tigela o volume total de água seria:
$$V_{\text{cap}}(h)=\tfrac{1}{3}\pi h^2(45-h).$$

O volume de água de bola é $\frac{4}{3}\pi(5)^3$. Logo o volume na tigela após a submersão da bola será:
$$\tfrac{1}{3}\pi\left(45h^2-h^3-500\right)\ \text{cm}^3$$

5. Alguns dos pioneiros do Cálculo, como Kepler e Newton foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou em 1715 *Stereometria doliorum*, um livro dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris). Eles freqüentemente aproximavam o formato dos lados por parábolas.

Por exemplo: um barril com altura h e o raio máximo R é construído pela rotação ao redor do eixo x da parábola $y=R-cx^2$, $-h/2 \le x \le h/2$, onde c é uma constante positiva (veja figura ao lado). Mostre que o volume interno do barril é:



$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right),$$

onde $r=R-d$ é o raio de cada extremo do barril e $d=ch^2/4$.

RESOLUÇÃO:

Observe que o raio de cada extremo do barril é dado por:

$$R - c\left(\tfrac{1}{2}h\right)^2 = R - d = r.$$

visto que o barril é obtido pela rotação do gráfico da função $y=R-cx^2$ ao redor do eixo-x, então este raio é igual ao valor de y em $x=1/2h$.

Observe ainda que o volume do barril pode ser calculado (devido a simetria) como 2 vezes o volume da parte do barril acima do eixo-x ($x>0$). Como o barril é um sólido de revolução então:

$$V = 2\int_0^{h/2} \pi y^2\,dx = 2\pi \int_0^{h/2} \left(R - cx^2\right)^2 dx = 2\pi\left[R^2x - \tfrac{2}{3}Rcx^3 + \tfrac{1}{5}c^2x^5\right]_0^{h/2}$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{2}R^2h - \tfrac{1}{12}Rch^3 + \tfrac{1}{160}c^2h^5\right)$$

Podemos reescrever esta expressão como:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left[2R^2 + \left(R^2 - \tfrac{1}{2}Rch^2 + \tfrac{3}{80}c^2h^4\right)\right].$$

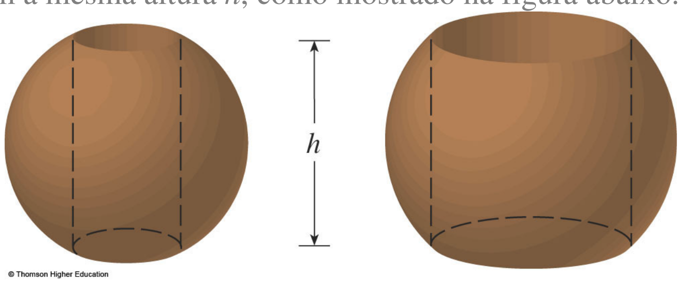
Usando que:

$$R^2 - \tfrac{1}{2}Rch^2 + \tfrac{3}{80}c^2h^4 = \left(R - \tfrac{1}{4}ch^2\right)^2 - \tfrac{1}{40}c^2h^4 = (R-d)^2 - \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{4}ch^2\right)^2 = r^2 - \tfrac{2}{5}d^2.$$

Obtemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right).$$

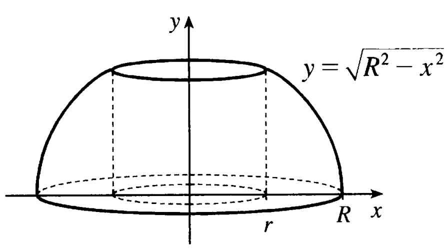
6. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura abaixo.



Verifique qual anel tem mais madeira. Use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera de raio R e expresse a resposta em termos de h.

RESOLUÇÃO:

Por simetria temos que o volume do anel é duas vezes o volume do sólido acima do eixo-x obtido pela rotação da região acima do eixo-x e abaixo da curva $y=\sqrt{R^2-x^2}$ entre $x=r$ e $x=R$. Pelo método das cascas cilíndricas temos que o volume deste sólido é dado por:



$$V = \int_r^R 2\pi x\, f(x)\,dx = \int_r^R 2\pi x\sqrt{R^2 - r^2}\,dx.$$

Logo o volume total do anel (V_{anel}) é:

Como pelo teorema de Pitágoras temos que $R^2 - r^2 = \left(\frac{1}{2}h\right)^2$ temos que o volume do anel é:

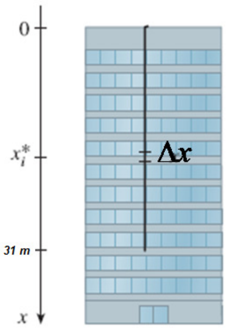
$$V_{anel} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$$

Note que o volume independe de R e r. Logo a quantidade de madeira usada será a mesma desde que os anéis tenham a mesma altura h.

7. Um cabo de 91 kg tem 31 metros de comprimento e está pendurado sobre a borda de um edifício alto. Qual o trabalho necessário para puxar o cabo para o topo do edifício?

RESOLUÇÃO:
No enunciado não temos uma fórmula para a função força, mas podemos usar a idéia da definição:

$$\boxed{W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx}$$



Vamos considerar que a origem está no topo do edifício e o eixo x aponta positivamente para baixo. Dividimos o cabo em pequenos pedaços iguais de comprimento Δx. O cabo pesa 91/31 kg/m, um pedaço de tamanho Δx tem massa igual a $91/31\Delta x$. A força exercida para se levantar este pedaço é igual a força exercida pela gravidade 91/31(kg/m). Δx(m) .10(m/s^2)=$910/31\Delta x$ kg.m/s^2 (N). Seja x_i* é um ponto no i-ésimo intervalo de tamanho Δx. Logo o trabalho realizado para se içar é:

$$\text{W=F.d=}\underbrace{910/31\Delta x}_{força}\ \underbrace{x_i^*}_{distância}$$

Fazendo o número de partes se tornar grande ($\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 910/31 x_i^* \Delta x = \int_0^{31} 910/31 x dx = 910/31 x^2/2\Big|_0^{31} = 910.31/2 = 28210/2 = 14105 \text{ N-m (J).}$$

8. A figura mostra um fio de alta tensão que está pendurado entre dois postes em x=- b e x=b. Este tem o formato de uma catenária com equação $y=c+a\ cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio. ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

RESOLUÇÃO:

$$y = c + a\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh\left(\tfrac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\tfrac{x}{a}\right) = \cosh^2\left(\tfrac{x}{a}\right).$$

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{\cosh^2\left(\tfrac{x}{a}\right)}\, dx = 2\int_0^b \cosh\left(\tfrac{x}{a}\right) dx = 2\left[a\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)\right]_0^b = 2a\sinh\left(\tfrac{b}{a}\right)$$