

**UFF – Instituto de Matemática e Estatística**  
**GMA 00109 - Cálculo II A - Turma H1 - 2014.1– Prof<sup>a</sup>. Ana Maria Luz**

**Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª ordem – Parte 2 /**  
**Equações Separáveis/ Equação de Bernoulli**

1. Resolva usando o método dos fatores integrantes:

a)  $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$

b)  $\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t$

c)  $y' + \left(\frac{2}{t}\right)y = 4t, y(1) = 2$

2. Considere o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 3y = 9 \\ y(0) = 12 \end{cases}$$

a) Encontre a solução do P.V.I. e estude o comportamento da solução quando  $t \rightarrow \infty$ .

b) Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

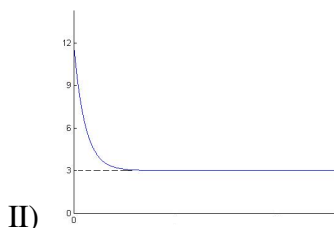
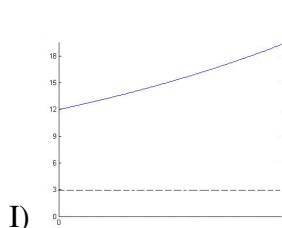
b.1)  $y(t)=3$  é uma solução de equilíbrio. Verdadeiro ou Falso?

(Soluções de equilíbrio correspondem à soluções em que não há variação do  $y$  quando  $t$  cresce, ou seja,  $dy/dt=0$ )

b.2)  $y(t)=3$  é uma solução instável. Verdadeiro ou falso?

(Considerando que  $y(t)$  seja solução de equilíbrio. Se  $y(t) \rightarrow 3$  quando  $t \rightarrow \infty$  dizemos que  $y=3$  é uma solução assintoticamente estável. Uma solução de equilíbrio que não é estável é chamada de instável. Por exemplo, se quando  $t \rightarrow \infty$  as soluções se afastam da reta  $y=3$  temos que  $y(t)=3$  é uma solução de equilíbrio instável.

c) De acordo com o que você respondeu no item b), qual dos gráficos abaixo representa geometricamente o comportamento da solução do PVI encontrada no item a)?



3. Considere o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - 2y = -8 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

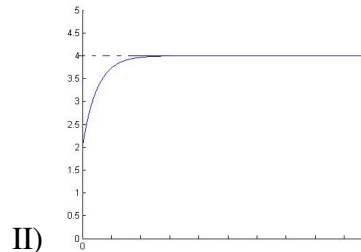
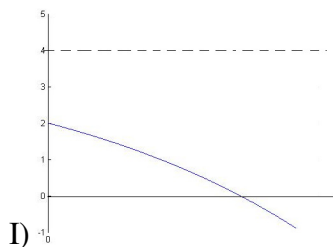
a) Encontre a solução do P.V.I. e estude o comportamento da solução quando  $t \rightarrow \infty$ .

b) Existe alguma solução de equilíbrio? Caso afirmativo:

b.1) Exiba uma solução de equilíbrio

b.2) Classifique esta solução quanto à estabilidade.

c) De acordo com o que você respondeu no item b), qual dos gráficos abaixo representa geometricamente o comportamento da solução do PVI encontrada no item a)?



4. Para cada uma das EDO's abaixo: mostre que a EDO é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais

a)  $\frac{dy}{dt} = \frac{4t - t^3}{4 + y^3}$

b)  $\frac{dy}{dt} = (1 - 2t)y^2$

c)  $\frac{dy}{dt} = \frac{(1 - 2t)}{y}$

5. Encontre a solução explícita dos P.V.I abaixo e escreva em qual intervalo a solução está definida

a)  $\frac{dy}{dt} = (1 - 2t)y^2, y(0) = -\frac{1}{6}$

b)  $\frac{dy}{dt} = \frac{(1 - 2t)}{y}, y(1) = -2$

6. **Equações de Bernoulli.** Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando  $n = 0$  e  $n = 1$ .

(b) Mostre que, se  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ , então a substituição  $v = y^{1-n}$  reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28.  $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$

## GABARITO

1. a)  $\mu(t) = e^{t/2}$  (fator integrante),  $y(t) = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}$

b)  $\mu(t) = e^{-2t}$ ,  $y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}$

c)  $\mu(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ ,  $t > 0$

2 a)  $y(t) = 9e^{-3t} + 3$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3$

b.1) Verdadeiro!  $y(t)=3$  é uma solução de equilíbrio (é uma solução que satisfaz a EDO e é constante ao longo do tempo, ou seja,  $dy/dt=0$ ).

b.2) Falso!  $y(t)=3$  é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável pois  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3$ .

c) graf. II

3. a)  $y(t) = -2e^{2t} + 4$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$  b) Sim

b.1)  $y(t)=4$  é uma solução de equilíbrio (é uma solução que satisfaz a EDO e é constante ao longo do tempo, ou seja,  $dy/dt=0$ ).

b.2)  $y(t)=4$  é uma solução de equilíbrio instável pois quando  $t \rightarrow \infty$ . as soluções se afastam da reta  $y=4$

c) graf. I

4. a)  $y^4 + 16y + t^4 - 8t^2 = c$

5. a)  $y = \frac{1}{t^2 - t - 6}$ ,  $-2 < t < 3$

b)  $y = -\sqrt{2t - 2t^2} + 4$ ,  $-1 < t < 2$