

3ª Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias Exatas

1. Determine se cada uma das equações é exata. Para as exatas encontre a solução.

a) $(2t + 3) + (2y - 2) \frac{dy}{dt} = 0$

b) $(2t + 4y) + (2t - 2y) \frac{dy}{dt} = 0$

c) $(t \ln y + ty) + (y \ln t + ty) \frac{dy}{dt} = 0, t > 0, y > 0$

d) $\frac{t}{(t^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(t^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dy}{dt} = 0$

2) Verifique que a equação abaixo não é exata

$$(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0. (*)$$

Apesar desta equação não ser exata podemos reduzi-la á uma equação exata multiplicando por um fator integrante $\mu(t,y)$ (as situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função exclusiva só de t ou só de y). Fazendo em (*) $M(t,y) = 3ty + y^2$ e $N(t,y) = (t^2 + ty)$ e multiplicando por μ obtemos

$$\mu M(t,y) + \mu N(t,y)y' = 0 (**)$$

Para que esta equação seja exata temos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N).$$

Por exemplo, se μ for uma função só de t temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \mu \frac{\partial M}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t}(\mu N) = \mu \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{d\mu}{dt} N$$

Então para que a equação (**) seja exata é necessário que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{M_y - N_t}{N} \mu, \text{ onde } M_y = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ e } N_t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Resolvendo a EDO acima para μ obtemos o fator integrante que quando multiplicado por $(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0$ resultará numa EDO exata. Com base nesta explicação obtenha um fator integrante μ e resolva a equação exata resultante.

GABARITO

1. a) $t^2 + 3t + y^2 - 2y = c$

b) não é exata

c) não é exata

d) $t^2 + y^2 = c$

2. $\mu(t) = t, \quad t^3 y + \frac{1}{2} t^2 y^2 = C$