

5^a Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias

1. Determine as trajetórias ortogonais a cada família dada:

- a) $x^2 + y^2 = C$ R. $y = Kx$
b) $y = Cx^2$ R. $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = K$
c) $x^2 - y^2 = C^2$ R. $xy = K$
d) $y = Ce^x$ R. $y^2 = -2x + K$
e) $x^2 - y^2 = Cx$ R. $x^2y + 1/3y^3 = K$
f) $y^2 = Cx^3$ R. $2x^2 + y^2 = K$
g) $x^{1/3} + y^{1/3} = C$ R. $y^{5/3} - x^{5/3} = K$
h) $x^2 + y^2 = Cx$ R. $x^2 + y^2 = Ky$
i) $3x + 4y = C$

2. Calcule as soluções da equação

$$x(y')^3 - y(y')^2 + 1 = 0$$

Resposta: $y = cx + \frac{1}{c^2}; \quad 4y^3 - 27x^2 = 0$

3. Determine as soluções das equações

- (a) $y = (y')^3 + xy'$
(b) $y = x(y' + 1) + (y')^2$

Respostas: (a) $y = c^3 + cx, 4x^3 + 27y^2 = 0$
(b) $x = -2p + ce^{-p} + 2, y = x(1 + p)p^2$

4. Dê a solução geral de uma equação diferencial do tipo (1) cujo polinômio característico tenha as seguintes raízes.

- a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$
b) $\lambda_1 = \sqrt{3} - 2i, \lambda_2 = \sqrt{3} + 2i .$
c) $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$
d) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 + i, \lambda_3 = -2 - i.$
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$

Resposta:

a) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}$.

b) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} \cos(2x) + c_2 e^{\sqrt{3}x} \sin(2x)$.

c) $y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$.

d) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \cos(x) + c_3 e^{-2x} \sin(x)$.

e) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{3x}$.

5. Ache a solução geral de $y''' - y' = 1/t$.

Solução: $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t - \ln(t) + \int \frac{e^{-t}}{t} dt e^{-t} + \int \frac{e^t}{t} dt e^t$

6. Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0, \quad x > 0.$$

Solução: $y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$.

7. Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$4x^2 y'' + 8xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

Solução: $y(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x$.

8. Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0.$$

Solução: $y(x) = c_1 x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 x^{-1} \sin(\sqrt{2} \ln x)$.