Matemática Para Economia III

Solimá Gomes Pimentel

Universidade Federal Fluminense

IM - GAN

Niterói - 2009

Solimá Gomes Pimentel, ****-

Matemática para Economia III/Solimá Gomes Pimentel

2pt, ; 31cm

Inclui Bibliografia.

1. Matemática para Economia III

CDD ***

ISBN: *******

Prefácio

As disciplinas de Matemática em um curso de Economia têm por objetivo principal, tratar a análise econômica na qual o economista utiliza símbolos matemáticos para enunciar problemas e utilizar resultados matemáticos conhecidos para auxiliar na resolução dos mesmos.

O termo economia matemática, refere-se à aplicação da matemática aos aspectos puramente teóricos da análise econômica. A diferença entre a economia matemática e a economia puramente literária é que na primeira, premissas, conclusões e equações são enunciadas em símbolos matemáticos utilizando para isso, a lógica matemática e na segunda, são utilizadas palavras em sentenças utilizando a lógica literária.

A escolha da lógica matemática tem a vantagem de obrigar os analistas a enunciar suas premissas em cada fase do raciocínio. Isto porque resultados matemáticos normalmente são escritos na forma se...então . Em enunciados escritos desta forma, para se usar a parte do então (resultado do teorema) primeiramente têm que se ter certeza de que a parte do se (hipótese ou condição) está de acordo com as premissas tido como verdadeiras.

Um modelo econômico é uma estrutura teórica, não necessariamente matemática, contudo, se o modelo for matemático, usualmente consistirá em um conjunto de equações que descreverá a estrutura do modelo. Relacionando algumas variáveis entre si de forma adequada, essas equações dão forma matemática ao conjunto de premissas analíticas adotadas. Aplicando determinadas operações matemáticas a essas equações, podemos tentar obter um conjunto de conclusões que resultem logicamente dessas premissas.

Iniciaremos nossos estudos com a Álgebra Matricial. Nossa escolha se deve ao fato de que esta parte da matemática nos proporciona um modo compacto de escrever um sistema de equações, mesmo que ele seja muito grande. Além disso, a Álgebra Matricial nos leva a um modo de testar a existência de uma solução pela avaliação de um determinante e nos dá um método para achá-la, caso esta exista.

Uma pequena desvantagem na Álgebra Matricial é que ela se restringe, apenas, a sistemas de equações lineares. É claro que em situações reais poucos modelos são lineares, porém, em muitos casos, uma relação linear pode produzir uma aproximação suficientemente boa com uma relação não-linear. Assim, a restrição da linearidade não é tão restritiva quanto possa parecer a primeira vista.

O Autor

Rio de Janeiro, Agosto de 2009.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Considere um conjunto V no qual estão definidas duas operações: uma **adição**, que a cada para de elementos u e v de V associa um elemento $u+v$ de V, chamado "**soma**"de u e v, e uma **multiplicação por escalar**, que a cada número real α e a cada elemento v de V associa um elemento αv de V, chamado "**produto**"de α por v.

Definição 2.1. *Dizemos que o conjunto V munido dessas operações é um* ***espaço vetorial real*** *se são satisfeitas as seguintes condições, para todos os elementos de V, designados pelas letras u, v e w, e os números reais, designados pelas letras α e β:*

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ *(associatividade)*

2. $u+v = v+u$ *(comutativa)*

3. *Existe um elemento em V, designado por e, que satisfaz v + e = v para qualquer v em V (existência do elemento neutro para a adição)*

4. *Para cada $v \in$ V, existe um elemento de V, designado por –v, que satisfaz v + (-v) = e (existência do elemento inverso aditivo, também chamado de simétrico ou oposto)*

5. *$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (associatividade)*

6. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ *(distributividade)*

7. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ *(distributividade)*

8. $1.v = v$ *(multiplicação por 1)*

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de ***vetores****.*

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:*

$$(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w), \quad \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Exemplo 2.2. *Os conjuntos* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.3. *O conjunto das matrizes m x n com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.4. *O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau* $\leq n$*, mais o polinômio nulo, em relação às operações usais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.*

2.1 Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto S é um **subespaço vetorial** de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 2.1. *Um subconjunto S, não-vazio, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se estiverem satisfeitas as condições:*
(i) $\forall$ *u,* $v \in S$ *tem-se* $u + v \in S$*.*
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*, se* $u \in S$*, tem-se* $\alpha u \in S$*.*

Exemplo 2.5. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço vetorial de V com as operações usuais.*

Exemplo 2.6. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 4-2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço vetorial V com as operações usuais.*

2.2 Combinação Linear

Definição 2.2 (Combinação Linear)**.** *Sejam* $u_1, u_2, ..., u_n$*, vetores de um espaço vetorial* V*. Uma combinação linear destes vetores é uma expressão da forma* $a_1.u_1 + a_2.u_2 + ... + a_n.u_n = w$*, onde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são escalares. O vetor* w *é dito uma* ***combinação linear*** *dos vetores* $u_1, u_2, ..., u_n$ *.*

Exemplo 2.7. *O vetor* $u = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $(1, 2, -1)$ *e* $(1, 1, -1)$*, pois* $(1, 0, -1) = -1(1, 2, -1) + 2(1, 1, -1)$*.*

Exemplo 2.8. *Considerando os vetores* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ *e* $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$*, tem-se que qualquer vetor* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *pode ser escrito como combinação linear dos* e_i*, especificamente:*

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Definição 2.3 (Subespaço Gerado)**.** *Seja* V *um espaço vetorial. Considere* A *um subconjunto de* V *diferente do conjunto vazio,* $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$*. O conjunto* S *de todos os vetores de* V *que são combinações lineares dos vetores de* A *é um subespaço vetorial de* V *chamado de* ***subespaço gerado por A****.*

Exemplo 2.9. *O espaço* $S = \{(x, 2x);\ x \in \mathbb{R}\}$ *é o subespaço gerado pelo vetor* $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 2.10. *O subespaço* $\mathbb{R}^3$ *gerado pelos vetores* $u = (1, 2, 0), v = (3, 0, 1)$ *e* $w = (2, -2, 1)$ *é o plano de equação* $2x - y - 6z = 0$ *.*

2.3 Independência Linear

Definição 2.4. *Um conjunto de vetores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$*em um espaço vetorial* V *é chamado* ***linearmente independente*** *se a equação vetorial* $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$ *admite apenas a solução trivial* $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$*.*

Definição 2.5. *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é chamado* ***linearmente dependente*** *quando a equação acima admite alguma solução não trivial.*

Observação 2.1. *É comum usar a abreviação **LI** para conjuntos linearmente independentes e **LD** para os linearmente dependentes.*

Exemplo 2.11. *Um conjunto contendo um único vetor é linearmente independente se, e somente se,* $v \neq 0$.

Exemplo 2.12. *O conjunto* $\{(1,2,0),(3,0,1),(2,-2,1)\}$ *é LI em* $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.2. *Os vetores* $v_1, ..., v_n$ *são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros.*

Observação 2.3. *Dois vetores* v_1 *e* v_2 *são LD, se um vetor é múltiplo escalar do outro.*

Observação 2.4. *No espaço real* $\mathbb{R}^3$ *a dependência de vetores pode ser escrita geometricamente como segue:*
dois vetores u *e* v *são dependentes se, e somente se, estão na mesma reta passando pela origem;*
três vetores u, v *e* w *são dependentes se, e somente se, estão no mesmo plano passando pela origem.*

2.3.1 Base de um Subespaço Vetorial

Definição 2.6. *Se* V *é um espaço vetorial qualquer e* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é um conjunto de vetores em* V*, dizemos que* S *é uma **base** de* V *se:*
(a) S *é linearmente independente.*
(b) S *gera* V.

Exemplo 2.13. *O conjunto* $\{(1,2,0),(12,-6,5)\}$ *é uma base do subespaço* $S : 2x - y - 6z = 0$.

Observação 2.5. *Se* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial* V*, então todo conjunto com mais de* n *elementos será linearmente dependente.*

Observação 2.6. *Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.*

Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição 2.7. *Seja V um espaço vetorial.Se V possui uma base com n vetores, então V tem* ***dimensão n*** *e escreve-se dim V = n.*

Exemplo 2.14. *dim* $\mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 2.15. *dim* $\{0\} = 0$.

Exemplo 2.16. *dim* $M_{m\times n} = mxn$.

Observação 2.7. *Seja V um espaço vetorial tal que dim* $V = n$. *Se S é um subespaço de V, então* $\dim S \leq n$.

Observação 2.8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então:*
(i) Qualquer conjunto de $n + 1$ *ou mais vetores é linearmente dependente.*
(ii) Qualquer conjunto linearmente independente é parte de uma base, isto é, pode ser estendido a uma base.
(iii) Um conjunto linearmente independente com n elementos é uma base.

Coordenadas de um vetor

Definição 2.8. *Sejam V um espaço vetorial,* $v \in V$ *e* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base qualquer de V. Podemos expressar v como uma combinação linear dos vetores desta base B, ou seja, existem números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *tais que* $v = a_1v_1+, a_2v_2 + ... + a_nv_n$ *. Os números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são as* ***coordenadas do vetor v na base B*** *e se representa por*

$$[v]_B = (a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

.

Exemplo 2.17. *No* $\mathbb{R}^2$, *considere as bases* $A = \{(1, 0), (0, 1)\}, B = \{(2, 0), (1, 3)\}$ *e* $C = \{(1, -3), (2, 4)\}$. *Dado o vetor v = (8,6), tem-se:*

$$[v]_A = (8, 6); \;\; [v]_B = (3, 2); \;\; [v]_C = (2, 3)$$

4ª Lista de Exercícios

1. Expresse o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0), v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

2. Determine os subespaços do $\mathbb{R}^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{(2, -1, 3)\}$.
   (b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$.
   (c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$.

3. Determine o valor de “k"para que o conjunto
   $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$ seja LI.

4. Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 2x\}$
   (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 3z = 0\}$
   (d) $S = \{(x, y, x);\ x, y \in \mathbb{R}\}$
   (e) $S = \{(x, y, z, w);\ x - 3y + z = 0\}$
   (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 3y,\ e\ z = -y\}$

5. Encontre a dimensão e o espaço gerado por:

   (i) $(1, -2, 3, -1)$ e $(1, 1, -2, 3)$.
   (ii) 3 e -3.
   (iii) $t^3 - 2t^2 + 5$ e $t^2 + 3t - 4$.

6. Seja o conjunto $A = \{w_1, w_2\}$, sendo $w_1 = (-1, 3, -1), w_2 = (1, -2, 4)$. Determine:

   (a) O subespaço S gerado pelo conjunto A.
   (b) O valor de “k"para que o vetor $w = (5, k, 11)$ pertença à S.

7. Considere $S = [(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)]$, o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(2, 1, 0), (1, -1, 2)$ e $(0, 3, -4)$. Determine sua equação.

8. Para qual valor de “k"será o vetor $u = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$ uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

9. Determine “m"para que o conjunto
$\{(2, -3, 2m), (1, 0, m + 4), (-1, 3, m - 2)\}$ seja L.I.