2.4 Transformações lineares

Definição 2.9. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação Uma transformação $T : V \to W$ é chamada* ***transformação linear*** *de V em W se:*

1.- $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \Re$.

Observação 2.9. *Uma transformação linear de V em V é chamada operador linear sobre V.*

Exemplo 2.18. *A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, x + 3y)$ é linear.*

Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\mathbb{R}^2$.

$T[(x, y) + (z, w)] = T(x + z, y + w) = (2(x + z) + (y + w), (x + z) + 3(y + w))$

$= ((2x+y)+(2z+w), (x+3y)+(z+3w)) = ((2x+y), (x+3y))+((2z+w), (z+3w)) =$

$T(x, y) + T(z, w)$.

Também, $T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x + 3\alpha y) = (\alpha(2x + y), \alpha(x + 3y)) =$

$= \alpha(2x + y, x + 3y) = \alpha T(x, y)$.

Exemplo 2.19. *A transformação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = 3x + 1$ não é linear.*

Se u=1 e v=3, $T(1 + 3) = T(4) = 13 \neq T(1) + T(3) = 4 + 10 = 14$.

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$uma trnsformação linear. Valem as seguintes propriedades:

1. $T(0_V) = 0_W$, ou seja, a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W.

2. $T(-v) = -T(v)$

3. Se U é um subespaço de V então $T(U)$ é um subespaço de W.

4. Dados$v_1, v_2, ..., v_n \in V$,

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

5. Uma transformação linear $T\colon V \to W$ fica completamente definida quando se conhece a imagem dos vetores de uma base de V.

6. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto gerador de V então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é um conjunto gerador da imagem de T.

7. Se $T(v_1), ..., T(v_n)$ são LI então os vetores $v_1, ..., v_n$ são LI.

Transformação Linear associada a uma Matriz

Seja

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right]$$

A transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é determinada por:

$$T_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Escrevemos

$$T_A(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & ... & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.26. *Seja a matriz:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. *Essa matriz determina uma transformação linear,* $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T_A(x, y) = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x + 2y, -2x + 3y, 4y)$$