

**GABARITO: 4ª Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias**

1)  $y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t}$

1.  $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

3.  $y(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t/3}$

5.  $y(t) = C_1 + C_2 e^{-5t}$

2) 9.  $y(t) = e^t$     10.  $y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$

3) 1.  $W = \frac{-7}{2} e^{t/2}$     2.  $W = 1$     3.  $W = e^{-4t}$     4.  $x^2 e^x$

4) a)  $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

b)  $y(t) = e^{-t/2} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right)$

c)  $y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \operatorname{sen}(3t)$

d)  $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}$

5) a i)  $y_p(t) = -\frac{e^{2t}}{2}$

a ii)  $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} - \frac{e^{2t}}{2}$

b i)  $y_p(t) = \frac{3}{17} \cos(t) - \frac{5}{17} \operatorname{sen}(t)$

b ii)  $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} + \frac{3}{17} \cos(t) - \frac{5}{17} \operatorname{sen}(t)$

c i)  $y_p = \frac{2}{13} e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{10}{13} e^t \cos(2t)$

c ii)

$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} + \frac{2}{13} e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{10}{13} e^t \cos(2t)$

6. Para uma equação de segunda ordem, sem a variável independente, da forma  $y'' = f(t, y')$ , a substituição  $v = y'$  e  $v' = y''$  leva a uma equação de primeira ordem da forma  $v' = f(t, v)$ . Se ela puder ser resolvida em  $v$ , então  $y$  pode ser encontrada integrando-se  $dy/dt = v$ .

Em  $y'' + y' = e^{-t}$ . Fazendo  $v' = y''$ ,  $v = y'$ , temos  $v' + v = e^{-t}$ .

Tomando a função integrante  $\mu(t) = e^t$ , temos

$$e^t v' + v e^t = e^{-t} e^t$$

ou  $(e^t v)' = 1$

$$e^t v = t + c_1 \Leftrightarrow v = t e^{-t} + c_1 e^{-t}$$

Ora, como  $dy/dt = v = t e^{-t} + c_1 e^{-t}$ , temos, por partes

$$\int t e^{-t} dt, \quad u = t, \quad du = dt, \quad dv = e^{-t} dt, \\ v = -e^{-t},$$

Logo,

$$y = \int t e^{-t} dt + c_1 \int e^{-t} dt$$

$$= -t e^{-t} - \int -e^{-t} dt - c_1 e^{-t}$$

$$= -c_1 e^{-t} + c_2 - t e^{-t} - e^{-t}$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 - t e^{-t}$$