Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00147 - Matemática para Economia III

2ª Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias

1. Resolva usando o método dos fatores integrantes:

a) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} e^{t/3}$

b) $\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t$

c) $y' + \left(\frac{2}{t}\right) y = 4t,\ y(1) = 2$

2. Considere o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 3y = 9 \\ y(0) = 12 \end{cases}$$

a) Encontre a solução do P.V.I.

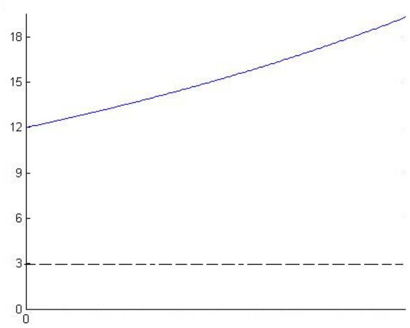
b) Estude o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

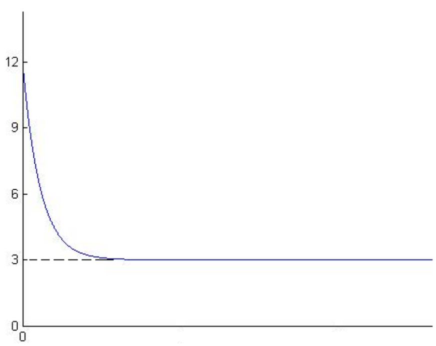
c) Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

c.1) $y(t)=3$ é uma solução de equilíbrio. Verdadeiro ou Falso?
(Lembrete: Soluções de equilíbrio correspondem à soluções em que não há variação do y quando t cresce, ou seja, $dy/dt=0$)

c.2) $y(t)=3$ é uma solução instável. Verdadeiro ou falso?
(Lembrete: Considerando que y(t) seja solução de equilíbrio. Se $y(t) \to 3$ quando $t \to \infty$ dizemos que y=3 é uma solução assintoticamente estável. Uma solução de equilíbrio que não é estável é chamada de instável. Por exemplo, se quando $t \to \infty$ as soluções se afastam da reta y=3 temos que $y(t)=3$ é uma solução de equilíbrio instável.

d) De acordo com o que você respondeu no item c), qual dos gráficos abaixo representa geometricamente o comportamento da solução do PVI encontrada no item a)?

I) 

II) 

3. Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - 2y = -8 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Encontre a solução do P.V.I.

b) Estude o comportamento da solução quando t→∞.

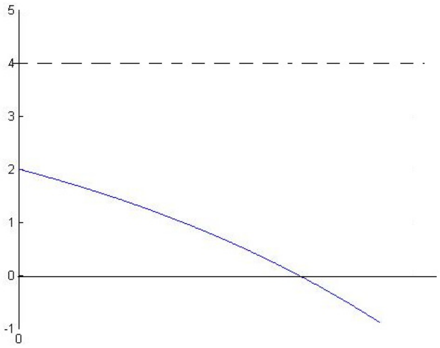
c) Existe alguma solução de equilíbrio? Caso afirmativo:

c.1) Exiba uma solução de equilíbrio

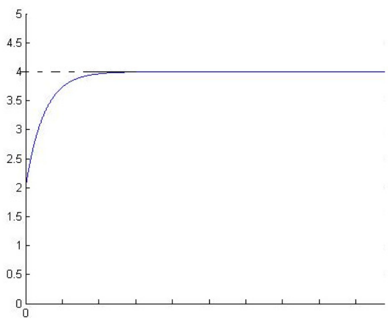
c.2) Classifique esta solução quanto à estabilidade.

d) De acordo com o que você respondeu no item c), qual dos gráficos abaixo representa geometricamente o comportamento da solução do PVI encontrada no item a)?

I)



II)



4. Considere as seguintes funções de demanda e oferta de um determinado produto

$$Q_d = 6 - P,\ Q_s = -2 + 3P$$

a) Supondo que a taxa de variação ao longo do tempo é diretamente proporcional ao excesso de demanda, conforme equação (15.10) do livro (considere o coeficiente de ajuste j=1), encontre a função P(t) que descreve o preço do produto em relação ao tempo (solução geral).
b) Qual o preço P* de equilíbrio intertemporal (P constante ao longo do tempo)? Qual é o preço de equilíbrio de compensação do mercado (P que iguala Q_d e Q_s)?
c) Se o preço inicial do produto for R$ 3,00 (P(0)=3) a dinâmica do preço de mercado impulsionará o preço para cima ou empurrará o preço para baixo? De quanto será a variação no preço do produto ($\Delta P = |P(0) - P^*|$)?

5. Considere as seguintes funções de demanda e oferta de um determinado produto

$$Q_d = \alpha - \beta P + \sigma \frac{dP}{dt},\ Q_s = -\gamma + \delta P\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$$

a) Supondo que a taxa de variação ao longo do tempo é diretamente proporcional ao excesso de demanda, conforme equação $\frac{dP}{dt} = Q_d - Q_s$, encontre a função P(t) que descreve o preço do produto em relação ao tempo (solução geral).
b) Qual o preço de equilíbrio intertemporal (P constante ao longo do tempo)? Qual é o preço de equilíbrio de compensação do mercado (P que iguala Q_d e Q_s)?
c) Qual restrição sobre o parâmetro σ asseguraria a estabilidade dinâmica?

6. Considere o sistema de EDO's de 1ª ordem

$\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases}$, onde $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$, $x_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, isto é, x'=Ax, onde x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e A= $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Como A é diagonalizável, sabemos que existe uma matriz P tal que D=P^{-1}AP, onde D é uma matriz diagonal que tem os autovalores de A na diagonal principal. Encontre as matrizes P, D e P^{-1}. Fazendo a mudança de variável y=P^{-1}x, onde y=$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, obtemos um sistema de EDO's de 1ª ordem mais simples

$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$, onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A.

Neste sistema podemos resolver cada EDO separadamente e obter y_1 e y_2. Fazendo a mudança x=Py, obtenha x_1 e x_2 que são soluções do sistema original.

GABARITO

1. a) $\mu(t) = e^{t/2}$ $(fator\ \mathrm{int}\,egrante)$, $y(t) = \dfrac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}$

b) $\mu(t) = e^{-2t}$, $y(t) = -\dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{2}t + ce^{2t}$

c) $\mu(t) = t^2$, $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$, $t > 0$

2. a) $y(t) = 9e^{-3t} + 3$ b) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 3$

c.1) Verdadeiro! y(t)=3 é uma solução de equilíbrio (é um solução que satisfaz a EDO e é constante ao longo do tempo, ou seja, dy/dt=0).

c.2) Falso! y(t)=3 é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável pois $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 3$.

d) graf. II

3. a) $y(t) = -2e^{2t} + 4$ b) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty$ c) Sim

c.1) y(t)=4 é uma solução de equilíbrio (é um solução que satisfaz a EDO e é constante ao longo do tempo, ou seja, dy/dt=0).

c.2) y(t)=4 é uma solução de equilíbrio instável pois quando $t\to\infty$. as soluções se afastam da reta y=4

d) graf. I

4. a) $P(t) = c_1 e^{-4t} + 2$ b) P*=2 (equilíbrio intertemporal), P=2 (iguala demanda e oferta)

c) A dinâmica impulsionará o preço para baixo , ΔP=1.

6. Como A= $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ diagonalizável, sabemos que existe uma matriz P tal que D=P^{-1}AP, onde D é uma matriz diagonal que tem os autovalores de A na diagonal principal.

Os autovalores são: λ_1=1 e λ_2=6, (-1,1) é autovetor associado a λ_1 e (4,1) é autovalor associado a λ_2, logo

$P=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/5 & 4/5\\ 1/5 & 1/5\end{bmatrix}$ e $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

Fazendo a mudança de variável y=P^{-1}x, onde y=$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$, obtemos um sistema de EDO's de 1ª ordem mais simples

$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 6y_2 \end{cases}$, logo $y_1(t)=C_1e^t$ e $y_2(t)=C_2e^{6t}$

Fazendo a mudança x=Py, obtemos que $x_1=-y_1+4y_2$ e $x_2=y_1+y_2$. Deste modo $x_1(t)=-C_1e^t+4C_2e^{6t}$ e $x_2(t)=C_1e^t+C_2e^{6t}$