# Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
# GAN 00147 - Matemática para Economia III – 2013.2

## 5ª Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias

1. Sabendo que $y_1(t)=t^{-1}$ é uma solução de $2t^2y''+3ty'-y=0,\ t>0$, achar uma segunda solução linearmente independente desta primeira solução.

(**Dica**: Use o método de redução de ordem, isto é, procure uma segunda solução da forma $y_2(t)=u(t)y_1(t)$, substitua na EDO, note que após a substituição fazendo uma mudança do tipo $v(t)=u'(t)$ obtém-se uma EDO de 1ª ordem em $v(t)$, resolvendo-se a EDO de 1ª ordem em $v(t)$, você pode obter $u(t)$ por integração uma vez que $v(t)=u'(t)$)

2. Verifique que a equação separável abaixo é exata e encontre uma solução geral para EDO.

$$(2t-1)+(y)y'=0\,.\quad (*)$$

(De fato toda equação separável pode ser resolvida como uma equação exata).

## Equação de Diferenças

3. Nos problemas a seguir resolva a equação de diferenças dada em função do valor inicial $y_o$. Descreva o comportamento da solução quando $k\to\infty$

a) $y_{k+1}=-0{,}9\ y_k$

b) $y_{k+1}=(-1)^{k+1}y_k$

c) $y_{k+1}=0{,}5y_k+6$

d) $y_{k+1}=-\ 0{,}5y_k+6$

4. Soluções de equações de diferenças para as quais $y_k$ tem o mesmo valor para todo k são chamadas soluções de equilíbrio. Podemos achar a solução de equilíbrio fazendo $y_{k+1}$ igual a $y_k$ na expressão da equação de diferenças. Encontre as soluções de equilíbrio do item a) em 1.

5. Considere o modelo discreto a seguir que serve para vários problemas de caráter financeiro

$$y_{k+1}=\rho_k y_k+b_k\,,$$

cuja solução é

$$y_k=\left(y_o-\frac{b_k}{1-\rho_k}\right)(\rho_k)^k+\frac{b_k}{1-\rho_k}\,.$$

Onde
$y_k$ é o montante no k-ésimo período de tempo,
$\rho_k=1+r_k$, onde $r_k$ é a taxa de juros do período,
$b_k$ é o depósito ou a retirada do período.

Com base nisso resolva o problema abaixo:
Um recém graduado da faculdade de economia faz um empréstimo de R$ 10.000,00 para comprar um carro com taxa de 1% ao mês. Quais os pagamentos mensais necessários para ele pagar o empréstimo em 4 anos (48 meses)? (**Não precisa efetuar os cálculos, basta escrever a equação para o "$b=b_{48}$"** - **Dica:** Substitua os dados na expressão dada da solução geral).

6. Resolva as equações de diferenças de 2ª ordem homogêneas

a) $y_{k+2}+ y_{k+1}-2y_k=0$
b) $y_{k+2}+ 6y_{k+1}+9y_k=0$
c) $y_{k+2}+(1/4)y_k=0$

7. Encontre a solução particular das para cada uma das equações de diferenças de 2ª ordem abaixo e escreva a solução geral.

a) $y_{k+2}+ y_{k+1}-2y_k=12$
b) $y_{k+2}+ 6y_{k+1}+9y_k=4$
c) $y_{k+2}+(1/4)y_k=5$

(Lembrete: Fórmula de De Moivre $(a \pm bi)^k = R^k\left(\cos(\theta k) \pm i\, sen(\theta k)\right)$, onde $R=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\cos(\theta)=\frac{a}{R}, sen(\theta)=\frac{b}{R}$)

**GABARITO**

1. $y=\frac{2}{3}ct^{1/2}+kt^{-1}$, onde $c$ e $k$ são constantes arbitrárias. A segunda parcela é um múltiplo de $y_1(t)$ e pode ser abandonada, mas a primeira parcela constitui uma nova solução independente. Desprezando a constante multiplicativa arbitrária, temos $y_2(t)=t^{1/2}$

2. Fazendo $M(t,y)=2t-1$ e $N(t,y)=y$. Verificamos que a EDO satisfaz a condição para equação ser exata uma vez que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{M}) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}(N).$$

Logo existe uma função $F(t,y)$ tal que $M(t,y)=\frac{\partial F}{\partial t}$ e $N(t,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$. Deste modo temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2t-1 \Rightarrow F(t,y)=t^2-t+\varphi(y) \Rightarrow \varphi'(y)=y \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^2}{2}+K$$

$F(t,y)=t^2-t+\frac{y^2}{2}+K \Rightarrow t^2-t+\frac{y^2}{2}=C$ é a solução implícita da EDO (Acabamos de ver que se quisermos podemos resolver a EDO separável usando as etapas vistas em sala para se resolver EDO's exatas).

3 a) $y_k=y_o(-0,9)^k$, $y_k \to 0$, quando $k\to\infty$
b) $y_k$ oscila entre os valores $y_o$ e $-y_o$, logo $y_k$ não tem limite quando $k\to\infty$.
c) $y_k=(0,5)^k(y_o-12)+12$, $y_k\to 12$, quando $k\to\infty$
d) $y_k=y_o(-0,5)^k(y_o-4)+4$, $y_k\to 4$, quando $k\to\infty$

4 a) $y_k=-0,9\, y_k \Rightarrow (1+0,9)y_k=0 \Rightarrow y_k=0$ ( a seqüência constante $y_k=0$ é solução de equilíbrio).

5 . O pagamento b necessário para que o empréstimos seja pago em 4 anos é encontrado fazendo-se $y_{48}=0$ e resolvendo para b, isso nos dá:

$$b=\frac{-100(1{,}01)^{48}}{(1{,}01)^{48}-1}$$

Comentário sobre este problema: Como os pagamentos mensais reduzem o saldo do empréstimo, b tem que ser negativo, a conta acima resulta b=-263,34, o pagamento é de fato |b|. O pagamento total do empréstimo é 48 vezes |b| ou R$12.640,32. Desse total R$10.000,00 é o capital que foi emprestado e R$2.640,32 corresponde aos juros.

6. a) $y_k = A_1(1)^k + A_2(-2)^k$

b) $y_k = A_3(-3)^k + A_4\, k\,(-3)^k$

c) $y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left( A_5 \cos(\frac{\pi}{2}k) + A_6 sen(\frac{\pi}{2}k) \right)$

7. a) $y_k = A_1(1)^k + A_2(-2)^k + 4k$

b) $y_k = A_3(-3)^k + A_4\, k\,(-3)^k + \frac{1}{4}$

c) $y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left( A_5 \cos(\frac{\pi}{2}k) + A_6 sen(\frac{\pi}{2}k) \right) + 4$