Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00147- Matemática para Economia III – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz

Lista 6 – Transformações Lineares/Autovalores e Autovetores/Diagonalização de Operadores

1- Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a) $T:IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y) = (2x + y, x + 3y)$

b) $T:IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y) = (x + y, x - y, x)$

c) $T:IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y)$

2- Determine a transformação linear tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Encontre v pertencente a IR^2 tal que $T(v) = (5,3,2)$.

3- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} papel \\ \\ tela \end{array} \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T:IR^3 \to IR^2$ definida por $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

4- Seja $T:V \to W$ uma transformação linear, chama-se núcleo da transformação linear ao conjunto

$$N(T)=\{v \in V;\ T(v)=0\}$$

a) Seja $T:IR^2 \to IR$ tal que $T(x,y)=y-x$, temos que

$$N(T)=\{(x,y) \in IR^2;\ T(x,y)=y-x=0\}=\{(x,y) \in IR^2;\ y=x\}.$$

Responda: $(2,1) \in N(T)$? $(3,3) \in N(T)$?

5- Seja $T:V \to W$ uma transformação linear, chama-se imagem da transformação linear ao conjunto

$$\mathrm{Im}(T)=\{w \in W;\ w=T(v) \text{ para algum } v \in V\}$$

a) Seja $T:IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y)=(x+y,2x+2y)$, temos que

$$\mathrm{Im}(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ (a,b)=T(x,y)=(x+y,2x+2y)\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases},$$

para que este sistema tenha solução devemos ter $2a-b=0$. Logo

$$\mathrm{Im}(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ 2a-b=0\}$$

Responda: $(1,2) \in \mathrm{Im}(T)$? $(6,3) \in \mathrm{Im}(T)$?

6- Dada a transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases A={(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)} e B={(3,0), (1,1)} para o IR^3 e IR^2 respectivamente. Determine:

a) $[T]_B^A$

b) Sendo v=(5,1,-2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A\,[v]_A$.

7- Seja a transformação T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.

b) Sejam A={e_1, e_2, e_3} e B={e_1,e_2} as bases canônicas respectivamente do IR^3 e IR^2. Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$) .

8- Sejam V=IR^2, A={(1,1),(2,1)} e B={(1,0),(0,1)} bases do IR^2.

a) Determine a matriz de mudança de base de A para a base B (representada por $[I]_B^A$).

b) Que relação pode ser estabelecida entre $[v]_B$ e $[v]_A$ usando a matriz de I em relação às bases A e B?

9 – Fazer exercícios 13, 14 e 14 da Lista 4- Determinantes (sobre autovalores e autovetores).

10 - Dada a transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ dada por

$$T(x,y)=(x+y,-2x+4y),$$

Determine:

a) $[T]$ (matriz de T em relação a base canônica)

b) Verifique se T é diagonalizável (ou seja, se $A = [T]$ é diagonalizável). Caso afirmativo determine uma matriz P que diagonaliza $A = [T]$, obtenha P^{-1} e calcule $P^{-1}.A.P.$.

GABARITO - Lista 6

1- a) T:$IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y) = (2x + y, x + 3y)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z, y+w) = (2(x+z)+(y+w),(x+z)+3(y+w)) =$

$= ((2x+y)+(2z+w),(x+3y)+(z+3w)) =$

$= ((2x+y),(x+3y)) + ((2z+w),(z+3w)) = T(x,y)+T(z,w).$

$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x + 3\alpha y) = (\alpha(2x+y), \alpha(x+3y)) =$

$= \alpha(2x+y, x+3y) = \alpha T(x,y).$

b) T:$IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, x-y, x)$

Prova. Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\Re^2$.

$T((x,y)+(z,w)) = T(x+z, y+w) = ((x+z)+(y+w),(x+z)-(y+w), x+z) =$

$= ((x+y)+(z+w),(x-y)+(z-w), x+z) =$

$= ((x+y),(x-y),x) + ((z+w),(z-w),z) = T(x,y)+T(z,w).$

$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, \alpha x) = (\alpha(x+y), \alpha(x-y), \alpha x) =$

$= \alpha(x+y, x-y, x) = \alpha T(x,y).$

c) T:$IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$

Prova. Sejam (x, y,z) e (a, b,c) vetores do $\Re^3$.

$T((x,y,z)+(a,b,c)) =$

$T(x+a, y+b, z+c) = (2(x+a)+(y+b)-(z+c),(x+a)+2(y+b)) =$

$= ((2x+y-z)+(2a+b-c),(x+2y)+(a+2b)) =$

$= ((2x+y-z),(x+2y)) + ((2a+b-c),(a+2b)) = T(x,y,z)+T(a,b,c).$

$T(\alpha(x,y,z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x + 2\alpha y) = (\alpha(2x+y-z), \alpha(x+2y)) =$

$= \alpha(2x+y-z, x+2y) = \alpha T(x,y,z).$

2- Se (x,y) $\in \Re^2$, $(x,y) = a(-1,1) + b(0,1)$

$$\begin{cases} a = -x \\ a+b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -x \\ b = x+y \end{cases} \Rightarrow (x,y) = -x(-1,1) + (x+y)(0,1)$$

$T(x,y) = -xT(-1,1) + (x+y)T(0,1) = (-x(3,2,1) + (x+y)(1,1,0) = (-2x+y, -x+y, -x)$

Logo, fazendo $(-2x+y, -x+y, -x) = (5,3,2)$

$$\begin{cases} -2x+y = 5 \\ -x+y = 3 \\ -x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$. Daí, v=(-2,1).

3- a) $T(x_1,x_2,x_3)=(300x_1+500x_2+800x_3, 40x_1+50x_2+60x_3)$

b) $y_1=300x_1+500x_2+800x_3$ gramas de papel e $y_2=40x_1+50x_2+60x_3$ gramas de tela

4- a) (2,1) $\in$ N(T)? NÃO (3,3) $\in$ N(T)? SIM

5- a) (1,2) $\in$ Im(T)? SIM (6,3) $\in$ Im(T)? NÃO

6- a) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & -1 & \end{bmatrix}$ b) $[v]_A=(3,-3,-2)$ então $[T(v)]_B=(1,3)$

7- a) T(x,y,z)=(x+y+z, x+2y +3z)

b) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A$=M usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de IR^3 e IR^2.

8- a) $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) a) $[v]_B=[I]_B^A[v]_A$

9- Respostas na lista 4

10 – Os autovalores são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=3$ (raízes do polinômio característico reais e distintas), logo os autovetores correspondentes $v_1=(1,1)$ e $v_2=(1,2)$ são L.I. Logo A é diagonalizável.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.