Teorema 1.6.5

Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se A B é invertível, então A e B também são invertíveis.

O seguinte problema fundamental ocorrerá em vários contextos no nosso trabalho adiante.

Um Problema Fundamental. Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente.

Para matrizes A invertíveis, o Teorema 1.6.2 resolve este problema completamente afirmando que, para *qualquer* matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se A não for quadrada, ou se A for quadrada mas não-invertível, então o Teorema 1.6.2 não aplica. Nestes casos, a matriz $\mathbf{b}$ deve, em geral, satisfazer certas condições para garantir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente. O seguinte exemplo ilustra como os métodos de eliminação da Seção 1.2 podem ser usados para determinar tais condições.

EXEMPLO 3 Determinando Consistência por Eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

Solução

A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser reduzida à forma escalonada como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

−1 vez a primeira linha foi somada à segunda e −2 vezes a primeira linha foi somada à terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

A segunda linha foi multiplicada por −1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

A segunda linha foi somada à terceira.

Agora é evidente pela terceira linha da matriz que o sistema tem uma solução se, e somente se, b_1, b_2 e b_3 satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar esta condição de uma outra maneira, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e somente se, $\mathbf{b}$ é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

onde b_1 e b_2 são arbitrários. ♦

EXEMPLO 4 Determinando Consistência por Eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

Solução.

A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada reduzida por linhas obtemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Neste caso não há restrições sobre b_1, b_2 e b_3; ou seja, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

para qualquer $\mathbf{b}$. ♦

OBSERVAÇÃO. Como o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do exemplo precedente é consistente para qualquer $\mathbf{b}$, segue do Teorema 1.6.4 que A é invertível. Nós deixamos a cargo do leitor verificar que as fórmulas em (3) também podem ser usadas para calcular $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Conjunto de Exercícios 1.6

Nos Exercícios 1–8 resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$ **2.** $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$ **5.** $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$ **6.** $\begin{aligned} - x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$ **8.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

9. Resolva o seguinte sistema geral invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 \qquad &= b_3 \end{aligned}$$

Use as fórmulas resultantes para encontrar a solução se

(a) $b_1 = -1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ (b) $b_1 = 5,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0$ (c) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 3$

10. Resolva os três sistemas do Exercício 9 simultaneamente usando o método do Exemplo 2.

Nos Exercícios 11–14 use o método do Exemplo 2 para resolver simultaneamente todos os sistemas dados.

11. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 1,\ b_2 = 4$
(b) $b_1 = -2,\ b_2 = 5$

12. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$
(b) $b_1 = -3,\ b_2 = 4,\ b_3 = -5$

13. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$
(b) $b_1 = -4,\ b_2 = 6$
(c) $b_1 = -1,\ b_2 = 3$
(d) $b_1 = -5,\ b_2 = 1$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 \qquad &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(a) $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1$
(b) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1$
(c) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0$

15. O método do Exemplo 2 pode ser usado em sistemas lineares com infinitas soluções. Use aquele método para resolver os sistemas de ambas partes simultaneamente.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

Nos Exercícios 16–19 encontre condições que as constantes b devem satisfazer para o sistema ser consistente.

16. $\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$ **17.** $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$ **19.** $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_1 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_1 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_1 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_1 &= b_4 \end{aligned}$

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use este resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ em $\mathbf{x}$.
(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

21. Resolva a equação seguinte em X.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Em cada parte, determine se o sistema homogêneo tem uma solução não-trivial (sem usar papel e lápis); depois decida se a matriz dada é invertível.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

23. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas cuja única solução é a trivial. Mostre que se k é qualquer inteiro positivo, então o sistema $A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também só tem a solução trivial.

24. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas e seja Q uma matriz invertível $n \times n$. Mostre que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial se, e somente se, $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

25. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de equações lineares consistente e seja $\mathbf{x}_1$ uma solução fixada. Mostre que qualquer solução do sistema pode ser escrita na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, onde $\mathbf{x}_0$ é a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mostre também que qualquer matriz $\mathbf{x}$ desta forma é uma solução.

26. Use a parte (*a*) do Teorema 1.6.3 para provar a parte (*b*).

Discussão e Descoberta

27. (a) Se A é uma matriz $n \times n$ e se $\mathbf{b}$ é uma matriz $n \times 1$, quais condições você imporia para garantir que a equação $\mathbf{x} = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ tem uma única solução em $\mathbf{x}$?

(b) Supondo que suas condições estão satisfeitas, encontre uma fórmula para a solução em termos de uma inversa apropriada.

28. Suponha que A é uma matriz $n \times n$ invertível. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ precisa ter uma solução única? Explique seu raciocínio.

29. É possível ter $AB = I$ e B não ser a inversa de A? Explique seu raciocínio.

30. Crie um teorema reescrevendo o Teorema 1.6.5 em contraposição lógica (veja Exercício 34 da Seção 1.4).

1.7 MATRIZES DIAGONAIS, TRIANGULARES E SIMÉTRICAS

Nesta seção nós vamos considerar certas classes de matrizes que têm formatos especiais. As matrizes que nós estudamos nesta seção estão entre os tipos mais importantes de matrizes encontradas em Álgebra Linear e surgirão em muitos contextos diferentes ao longo do texto.

Matrizes Diagonais Uma matriz quadrada na qual todas as entradas fora da diagonal principal são zero é chamada ***matriz diagonal***. Aqui temos alguns exemplos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal arbitrária D de tamanho $n \times n$ pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Uma matriz diagonal é invertível se, e somente se, todas suas entradas na diagonal são não-nulas; neste caso, a inversa de (1) é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

O leitor deveria verificar que $DD^{-1} = D^{-1}D = I$.

Potências de matrizes diagonais são fáceis de calcular; nós deixamos para o leitor verificar que se D é a matriz diagonal (1) e k é um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 Inversas e Potências de Matrizes Diagonais

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix} \quad ♦$$