Gabarito P3

1) a) $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$ **(Pelo Teorema Fundamental do cálculo)**

b) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{u^{-1}}{-1} + C$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$= -\frac{1}{u} + C$

$= -\frac{1}{\ln x} + C$

c) $\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{f} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{g'} dx = -x\cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)\,dx$

$= -\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + 0.\underbrace{\cos 0}_{1} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$

$= \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cancel{\operatorname{sen} 0}^{\,0}$

$= 1$

2) $Q = 1000e^{-0,2P}$

$C_T = 200 + 3Q = 200 + 3(1000e^{-0,2P}) = 200 + 3000e^{-0,2P}$

$R_T = P.Q = P\,1000e^{-0,2P}$

a) $L = R_T - C_T = 1000Pe^{-0,2P} - (200 + 3000e^{-0,2P})$

$L = 1000Pe^{-0,2P} - 3000e^{-0,2P} - 200$

b) $L' = 1000e^{-0,2P} + 1000P(-0,2)e^{-0,2P} - 3000(-0,2)e^{-0,2P}$

$L' = 1000e^{-0,2P} - 200Pe^{-0,2P} + 600e^{-0,2P}$

$L' = 0 \Rightarrow e^{-0,2P}(1600 - 200P) = 0$

$\Rightarrow 1600 - 200P = 0$

$1600 = 200P \Rightarrow P = 8$

ESTUDO DO SINAL DE L'

$e^{-0,2P}$	$+ + +$		$+ +$
$1600-200P$	$+ +$	8	$- -$
L'	$+ + +$	8	$- - -$

comportamento de L $\nearrow$ $\searrow$

Pelo Teste da derivada primeira para valores extremos absolutos, $P=8$ é máximo global, logo o preço que maximizará o lucro será 8 reais

(3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4} + 1$

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+4) - x^2(2x)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}$

ESTUDO DE SINAL DE $f'(x)$

$8x$	$-$	$x=0$	$+$
$(x^2+4)^2$	$+ +$		$+ +$
$f'(x)$	$- -$	0	$+ +$

comportamento de f $\searrow$ $\nearrow$

f é decrescente de $(-\infty,0)$

f é crescente de $(0,+\infty)$

b) $x=0$ é mínimo local pelo Teste da derivada primeira (vide estudo de sinal de $f'(x)$ no item a))

Para o gráfico vamos usar

$(0, f(0)) = (0,1)$ é ponto de mínimo local

c) $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+4)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{8(x^2+4)^{\cancel{2}} - 8x.2\cancel{(x^2+4)}.2x}{(x^2+4)^{\cancel{4}}}$

$$f''(x) = \frac{8(x^2+4) - 32x^2}{(x^2+4)^3} = \frac{-24x^2+32}{(x^2+4)^3}$$

$-24x^2+32 = 0 \Rightarrow 24x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

ESTUDO DE SINAL DE $f''(x)$

	$-2\sqrt{3}/3$		$2\sqrt{3}/3$	
$-24x^2+32$	$-$	$+$	$-$	
$(x^2+4)^3$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	

comportamento de f

muda concavidade

f é côncava para baixo para $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$

f é côncava para cima para $x \in (-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$

$-2\sqrt{3}/3$ e $2\sqrt{3}/3$ são abscisas de pontos de inflexão

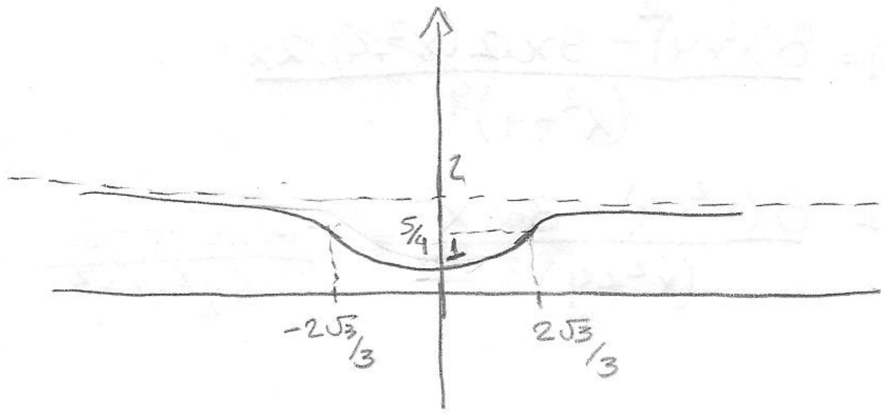
d) $f(x)$ não tem assíntotas verticais (f é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\cancel{4/x^2}^{\,0})} + 1 = 1+1=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\cancel{4/x^2}^{\,0})} + 1 = 1+1=2$

$y=2$ é assíntota horizontal

e)



$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4/3}{4/3+4} + 1 = \frac{4/3}{16/3} + 1 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{16}_4} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

1) a) $-0{,}3q^2 + 90 = 0{,}3q^2 + 30$

$90 - 30 = 0{,}6q^2$

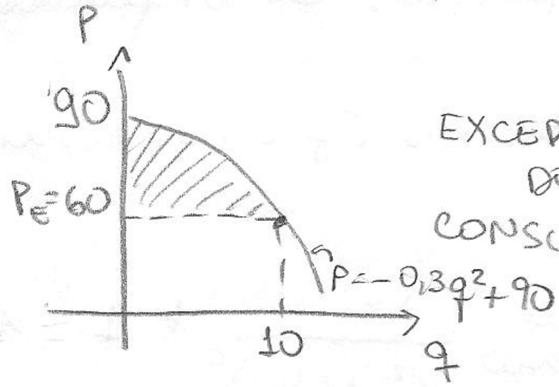
$60 = 0{,}6q^2$

$q^2 = \frac{60}{0{,}6} = \frac{600}{6} = 10 \Rightarrow q = \pm 10$ (-10 não serve pois q é quantidade)

$q_E = 10$

$P_E = 0{,}3(10)^2 + 30 = 0{,}3 \cdot 100 + 30 = 60$

b)



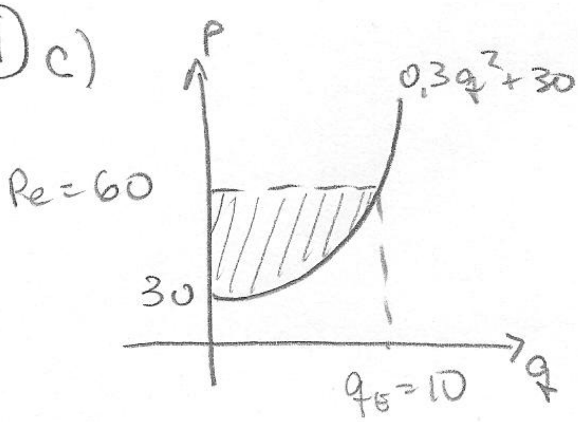
EXCEDENTE DO CONSUMIDOR $= \int_0^{10} -0{,}3q^2 + 90 \, dq - 10 \cdot 60$

$= -0{,}3\frac{q^3}{3} + 90q \Big|_0^{10} - 600$

$= -0 \cdot 1(1000) + 90 \; 10 - 600$

$= -100 + 900 - 600 = 200$

4 c)



$$\text{EXCEDENTE DO PRODUTOR} = 60 \cdot 10 - \int_0^{10} 0,3q^2+30\,dq$$

$$= 600 - 0,3\frac{q^3}{3} - 30q \Big|_0^{10}$$

$$= 600 - 0,1\,(1000) - 30 \cdot 10$$

$$= 600 - 100 - 300$$

$$= 200$$