(B=A)

(1) (a) (1,0) Seja $R \subset A \times B$. Se a e b são últimos elementos de A segundo R então $a=b$

Prova: Se a é último elemento de A segundo R então $\forall x \in A$, xRa

Se b é último elemento de A segundo R então $\forall x \in A$ xRb

Logo bRa e aRb como R é relação antissimétrica então $a=b$

b) Se $R \subseteq A \times B$. R é uma relação total se, e somente se R^{-1} é sobrejetiva

$R^{-1} \subseteq B \times A$ $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ tal que bRa

Prova.

($\Rightarrow$) Seja R uma relação total então $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ tal que $(a,b) \in R$

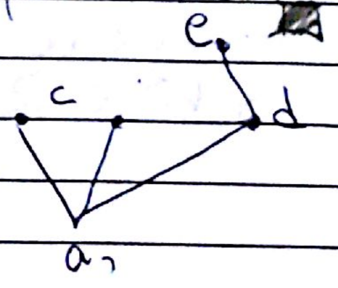
Se $(a,b) \in R$ então $(b,a) \in R^{-1}$ logo $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ tal que $(b,a) \in R^{-1}$

Portanto R^{-1} é sobrejetiva

($\Leftarrow$) Sendo $R^{-1} \subseteq B \times A$ uma relação sobrejetiva temos que $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ tal que $(b,a) \in R^{-1}$. Se $(b,a) \in R^{-1}$ temos que $(a,b) \in R$, logo $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ tal que $(a,b) \in R$

Portanto R é uma relação total

(2) $A = \{a, b, c, d, e\}$



$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (a,c), (a,d), (d,e), (a,e)\}$

Limite superior: $a \in A$ tal que $\forall x \in X$, xRa __/__/__

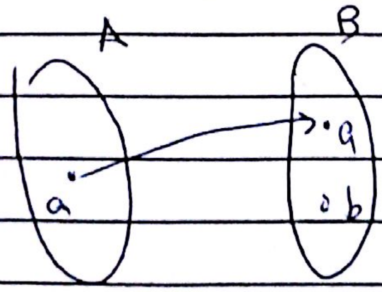
b) Sim, X é limitado superiormente em A segundo R
Conjunto dos limites superiores = $\{d, e\}$

c) Sim X possui supremo em A segundo R. O supremo é o elemento mínimo do conjunto dos limites superiores.
Logo d é o supremo de X em A.

(3) $A = \{a\}$ $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

a.1) $=: A \to B$ domínio = A 0.1
$= : \{(a,a)\}$ Imagem = $\{a\} \subseteq B$ 0.1
É função pois
Observe que $\forall x \in A\ \exists!\ y \in B$ tal que $(x,y) \in =$

0.2 Outra forma de justificar
Suponha que não é função total logo
$\exists x \in A\ \forall y \in B\ (x,y) \notin =$
logo $\forall y \in B$ ... $y \neq a$
Contradição pois $a \in B$.



0.1 Injetiva pois satisfaz que se $(a_1,b) \in R$ e $(a_2,b) \in R$ então $a_1 = a_2$ (neste caso R é =)

0.1 Não sobrejetiva pois $b \in B$ mas $\nexists x \in A$ tal que $(x,b) \in R$ (neste caso R é =)

③

$a_2)$ $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $x^2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, y = x^2\}$

0.2 É função total. Suponha que não seja então $\exists x \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall y \in \mathbb{Z}$ $y \neq x^2$. Contradição. $4 \in \mathbb{Z}$ e $4 = 2^2$.

0.1 Domínio: $\mathbb{Z}$

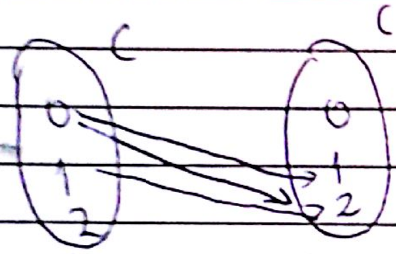
0.1 Imagem: $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$

0.1 Não é injetiva $4 = (-2)^2$ e $4 = (2)^2$

0.1 não é sobrejetiva $-4 \in \mathbb{Z}$ e $\nexists x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -4$

b: $< : C \to C$

0.3



Não é função total pois $\exists x \in C$ tal que $\forall b \in C, (x,b) \notin R$ (Neste caso R é $<$)

Isto é, não satisfaz a definição de ser relação total.

④ $S = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$

$f: S \to \mathbb{R}$

$$f(s) = \begin{cases} (1/2s) - 1, & 0 < s \leq 1/2 \\ 1/(2s-2) + 1, & 1/2 \leq s < 1 \end{cases}$$

1,0

a) mostre que f é injetora

Prova: Suponha que f não é injetora então existe $s_1 \neq s_2$ tal que $f(s_1) = f(s_2)$

Caso 1. Suponha que $s_1, s_2 \in (0, \frac{1}{2}]$, $s_1 \neq s_2$ e $f(s_1) = f(s_2)$ logo

$$\frac{1}{2s_1} - 1 = \frac{1}{2s_2} - 1 \Rightarrow \frac{1-2s_1}{2s_1} = \frac{1-2s_2}{2s_2} \Rightarrow$$

$$\cancel{2}s_2(1-2s_1) = \cancel{2}s_1(1-2s_2)$$

$$s_2 - 2s_2s_1 = s_1 - 2s_2s_1$$

$$s_2 - s_1 = -2s_2s_1 + 2s_2s_1$$

$$s_2 - s_1 = 0 \Rightarrow s_2 = s_1 \text{. Contradição}$$

Caso 2: Suponho que $s_1, s_2 \in [1/2, 1)$, $s_1 \neq s_2$ e $f(s_1) = f(s_2)$ logo

$$\frac{1}{2s_1-2} + 1 = \frac{1}{2s_2-2} + 1$$

$$\frac{1+2s_1-2}{2s_1-2} = \frac{1+2s_2-2}{2s_2-2}$$

$$(2s_2-2)(1+2s_1-2) = (2s_1-2)(1+2s_2-2)$$

$$2s_2 - 2 + 2s_1 2s_2 - 4s_1 + 4 = 2s_1 - 2 + 4s_1s_2 - 4s_2 + 4$$

$$2s_2 = 2s_1 \Rightarrow s_2 = s_1 \text{. Contradição}$$

Caso 3: Suponho que $S_1 \in [0, 1/2]$ e $S_2 \in [1/2, 1)$.

• Se $S_1 = 1/2$ e $S_2 = 1/2$ $f(S_1) = f(S_2) = 0$. nada temos a demonstrar.

• Considere o caso $S_1 \neq S_2$ suponho $f(S_1) = f(S_2)$

Como $S_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 >$

$$\frac{1}{2S_1} > \Rightarrow \frac{1}{2S_1} - 1 > 0$$

isto é, $f(S_1) > 0$

Como $S_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 - 1 > \frac{1}{2} - 1$.

$$\Rightarrow 2S_2 - 2 > -1 \Rightarrow \frac{1}{2S_2 - 2} < \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2S_2 - 2} + 1 < 0$$, isto é, $f(S_2) < 0$.

Portanto $f(S_1) \neq f(S_2)$. contradizendo a hipótese.

em qualquer dos casos temos que f é injetora.

(b) $(0, s)$

Se f é injetora e sobrejetora então f é bijeção entre S e $\mathbb{R}$ ou seja, S e $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade, então como S é não enumerável temos que $\mathbb{R}$ é não enumerável!

(5) P. M = $4 \times 3 = 12$ (Se a mulher tem 4 blusas e 3 saias pode se vestir de 12 formas diferentes) (0,5)

P M e P A = $4 \times 3 + 5 = 17$
(Se a mulher tem 4 blusas e 3 saias e 5 vestidos a mulher pode se vestir de 17 formas diferentes) (0,5)

(6) (0,5 pt)

102 alunos. Pelo Princípio da casa dos pombos se houver mais alunos (102) do que notas possíveis (101) pelo menos dois terão a mesma nota.

Situação simplificada: notas de 0 a 3 são as casas

0	1
2	3

(4 casas: notas de 0 a 3)

Se tiver 4 pessoas para alojar nas casas pelo menos duas ficarão no mesmo casa ou seja, com a mesma nota.