GABARITO P2 / B2

1ª Questão a) $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$ 1 pt

a) Prova.

($\subseteq$) Seja $(y,x) \in (R-S)^{-1}$ então $(x,y) \in R-S$, isto é, $(x,y) \in R$ e $(x,y) \notin S$.

Como $(x,y) \in R$ temos que $(y,x) \in R^{-1}$ e como $(x,y) \notin S$ temos que $(y,x) \notin S^{-1}$. Uma vez que $(y,x) \in R^{-1}$ e $(y,x) \notin S^{-1}$ temos que $(y,x) \in R^{-1} - S^{-1}$

($\supseteq$) Seja $(y,x) \in R^{-1} - S^{-1}$ então $(y,x) \in R^{-1}$ e $(y,x) \notin S^{-1}$. Como $(y,x) \in R^{-1}$ temos que $(x,y) \in R$ e como $(y,x) \notin S^{-1}$ temos que $(x,y) \notin S$ visto que $(x,y) \in R$ e $(x,y) \notin S$ temos que $(x,y) \in R-S$ logo $(y,x) \in (R-S)^{-1}$ ■

b) $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ Prove que

$(R;S);T = R;(S;T)$ 1 pt

Prova

($\subseteq$) Seja $(x,z) \in (R;S);T$ logo existe $y \in C$ tal que $(x,y) \in (R;S)$ e $(y,z) \in T$ Como $(x,y) \in R;S$ existe $\tilde{y} \in B$ tal que $(x,\tilde{y}) \in R$ e $(\tilde{y},y) \in S$ e $(y,z) \in T$ logo $(x,\tilde{y}) \in R$ e $(\tilde{y},z) \in S;T$, ou seja, $(x,z) \in R;(S;T)$.

($\supseteq$) Seja $(x,z) \in R;(S;T)$ então existe $b \in B$ tal que $(x,b) \in R$ e $(b,z) \in (S;T)$. Como $(b,z) \in (S;T)$ existe $d \in C$ tal que $(b,d) \in S$ e $(d,z) \in T$.

Uma vez que $(x,b) \in R$, $(b,d) \in S$ e $(d,z) \in T$ temos que $(x,d) \in R;S$ e $(d,z) \in T$, ou seja, $(x,z) \in (R;S);T$ ■

2ª Questão ②

$1pt$ a) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a+x \equiv b+x \pmod{n+x}$ (F)

Contra-exemplo

$3 \equiv 1 \pmod 2$

$\underbrace{3+1}_{4} \equiv \underbrace{1+1}_{2} \pmod{\underbrace{2+1}_{3}}$ é falso já que

$4 \equiv 1 \pmod 3$, $4 \notin [2]_3$.

$1pt$ b) Se $a \equiv b \pmod n \Rightarrow ax \equiv bx \pmod n$

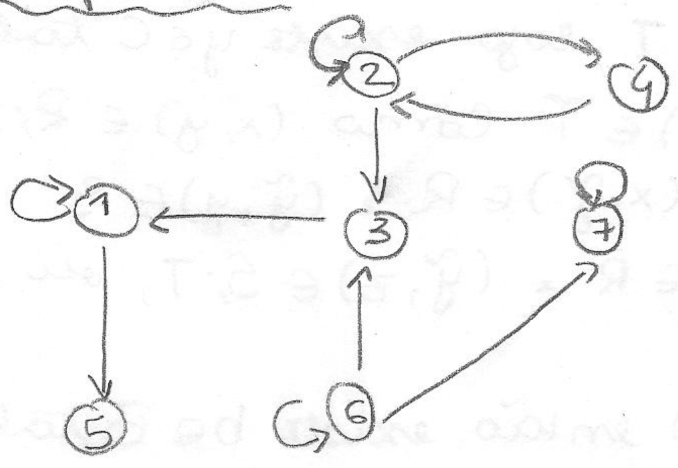
Prova:

Se $a \equiv b \pmod n$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = nk$, multiplicando por $x \in \mathbb{Z}$ ambos os lados temos que

$ax - bx = n(kx)$, $kx \in \mathbb{Z}$ logo

$n \mid ax - bx$, isto é, $ax \equiv bX \pmod n$. ■

3ª questão



0,3
- não-simétrica
- não-transitiva
- não-reflexiva

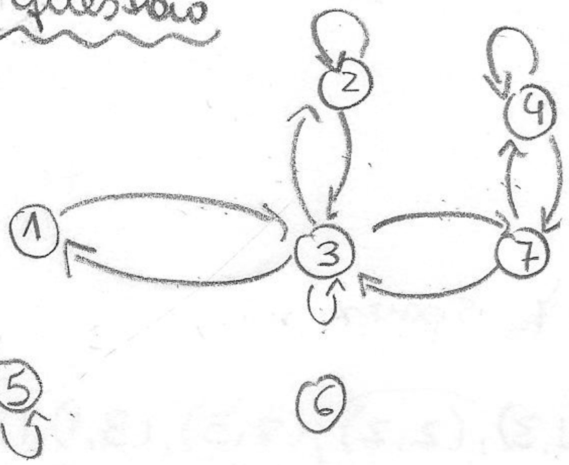
grafo R

0,2

$R = \{(1,1), (1,5), (2,2) (2,3), (2,4), (3,1), (4,2), (6,3), (6,6), (6,7), (7,7)\}$

11 pares

3ª questão



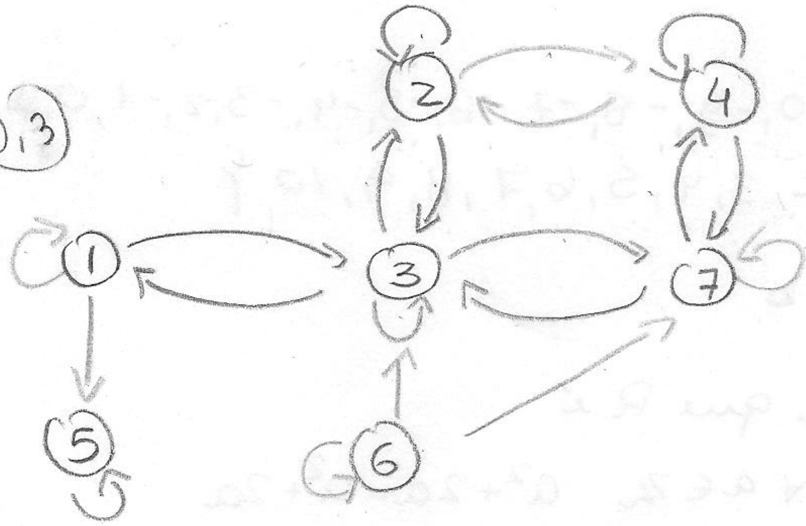
não-reflexivo
SIMÉTRICA
não-transitivo
(0,3)

grafo S

12 pares

$S = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,7), (4,4), (4,7), (5,5),$
$(7,3), (7,4)\}$ (0,2)

(0,3)



RUS: é reflexiva
não simétrica
não transitiva
(0,2)

grafo de RUS

20 pares

$RUS = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,1), (3,2), (3,7), (4,4)$
$(4,2), (4,7), (5,5), (6,3), (6,6), (6,7), (7,3), (7,4), (7,7)\}$
(0,4)

4ª Questão

R	1	2	3
1	1	1	1
2	0	0	1
3	1	0	0

0,3

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$ 5 pares

7 p

0,4

Fecho-{reflexivo}(R) = $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$

0,4

Fecho-{simétrica}(R) = $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

0,14

Fecho-{transitiva}(R) = $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$

9 pares

5ª Questão

$A = \{x \in \mathbb{Z};\ |x| \leq 10\} = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$aRb \iff a^2 + 2a = b^2 + 2b$

a) Prova: Vamos verificar que R é

reflexiva: temos que $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a^2+2a = a^2+2a$ logo também vale para $a \in A$, então aRa.

Simétrico: suponho que aRb logo $a^2+2a = b^2+2b$ pela simetria da igualdade temos que $b^2+2b = a^2+2a$ logo bRa

Transitiva: suponho que aRb e bRC, isto é, $a^2+2a = b^2+2b$ e $b^2+2b = c^2+2c$ De onde temos que $a^2+2a = c^2+2c$, ou seja, aRC. ■ (0,8)

b) se $a \neq b$ temos $b^2 - a^2 = 2a - 2b$

$$b^2 - a^2 = -2(b-a)$$

$$\cancel{(b-a)}(b+a) = -2\cancel{(b-a)}$$

$$(b+a) = -2$$

$$b = -a - 2$$

5ª Questão

5

b) continuação: 0,7

Portanto as classes de equivalência são

$-\overline{1} = \{-1\}$

$\overline{0} = \{-2, 0\}$

$\overline{1} = \{1, -3\}$

$\overline{2} = \{2, -4\}$

$\overline{3} = \{3, -5\}$

$\overline{4} = \{4, -6\}$

$\overline{5} = \{5, -7\}$

$\overline{6} = \{6, -8\}$

$\overline{7} = \{7, -9\}$

$\overline{8} = \{8, -10\}$

$\overline{9} = \{9\}$

$\overline{10} = \{10\}$

c) $A/_R = \{-\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}\}$ 0,5

d) $A/_R$ é uma partição de A induzido por R, ou seja,

$$\mathcal{P} = A/_R = \{\{-1\}, \{-2, 0\}, \{1, -3\}, \{2, -4\}, \{3, -5\}, \{4, -6\}, \{5, -7\}, \{6, -8\}, \{7, -9\}, \{8, -10\}, \{9\}, \{10\}\}$$ 0,5