GABARITO PROVA 1 A2 / C2

1ª questão

a) $A = \{x \in \mathbb{N}, x \mid 24\}$ 0,2

$B = \{x \in \mathbb{N}; 2 \mid x\}$ 0,2

$C = \{x \in \mathbb{N}, x = 0\} \cup \{x \in U; x = \emptyset\}$ 0,2

b) b1) $A \subseteq B$ 0,3

Falso. Contra-exemplo:

$3 \in A$ e $3 \notin B$

b2) $B \subseteq A$ contra-exemplo

Falso

$26 \in B$ e $26 \notin A$

b3) $C \in P(B)$ 0,3

Falso

$C = \{0, \emptyset\}$, $C \notin P(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{4\}, \ldots$
$\{0,2\}, \{0,4\}, \ldots\}$

2ª Questão $n \geq 3$, $2n+1 < n^2$

Prova (por indução em n):

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$

Base da indução:

Para $n = 3$ temos que

$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 9 = 3^2$

Hipótese de indução:

Suponho que para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$

temos que

$2k + 1 < k^2$

Passo de indução:

Pela hipótese de indução temos que $2k+1 < k^2$;
além disso como $k \geq 3$ temos que $2 < 2k+1$
então $2k+1+2 < k^2 + 2k + 1$, isto é
$2(k+1)+1 < (k+1)^2$

Conclusão: logo $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ temos que
$2n+1 < n^2$ ∎

3ª Questão : $A \subseteq B$ (H1) e $A \subseteq C$ (H2)

Prova:

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap A && (P1) && 0{,}3\\
&\subseteq B \cap A && (H1, P2) && 0{,}3\\
&= A \cap B && (P3) && 0{,}3\\
&\subseteq C \cap B && (H2, P2) && 0{,}3\\
&= B \cap C && (P3) \ \blacksquare && 0{,}3
\end{aligned}
$$

se aplicadas corretamente.

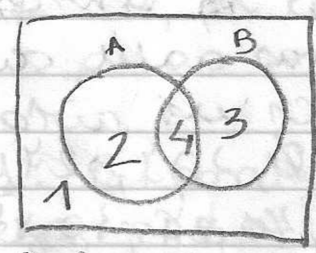
4ª Questão

a) $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$

1,0

Contra-exemplo

(0,8 se fizer confusão com rótulos e conjuntos dependendo do caso!)



$U = \{1,2,3,4\}$

$A = \{2,4\}$

$B = \{3,4\}$

$A \cup B = \{2,3,4\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

$\{2,3\} \in P(A \cup B)$ mas $\{2,3\} \notin P(A) \cup P(B)$

$\{2,3,4\} \in P(A \cup B)$ mas $\{2,3,4\} \notin P(A) \cup P(B)$

1,0

b) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$

Prova.

($\subseteq$) Seja $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Caso 1 Se $(x,y) \in (A \times B)$ então $x \in A$ e $y \in B$ para qualquer $C \subseteq U$ temos que $B \subseteq B \cup C$ portanto temos que $x \in A$ e $y \in B \cup C$ isto é, $(x,y) \in A \times (B \cup C)$

Caso 2: Se $(x, y) \in (A \times C)$ então $x \in A$ e $y \in C$ para qualquer $B \subseteq U$ temos que $C \subseteq B \cup C$ logo $x \in A$ e $y \in B \cup C$ ou seja, $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

em qualquer um dos casos

$(x, y) \in A \times (B \cup C)$

($\supseteq$) seja $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ então $x \in A$ e $y \in B \cup C$, ou seja, $y \in B$ ou $y \in C$

Caso 1 Se $x \in A$ e $y \in B$ temos que $(x, y) \in (A \times B)$. Para qualquer C temos que $(A \times B) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ logo

$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Caso 2 Se $x \in A$ e $y \in C$ temos que $(x, y) \in (A \times C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

logo $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

5ª questão $A = \emptyset$ $B = \{x, y\}$

$A \cup B = \emptyset \cup \{x, y\} = \{x, y\}$ 0,2

$A \times B = \emptyset$ 0,2

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ 0,2

$P(P(A \cup B))$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, \{\{y\}\}, \{\{x,y\}\}, \{\emptyset, \{x\}\}, \{\emptyset, \{y\}\}, \{\emptyset, \{x,y\}\}, \{\{x\}, \{y\}\}, \{\{x\}, \{x,y\}\}, \{\{y\}, \{x,y\}\}, \{\emptyset, \{x\}, \{y\}\}, \{\emptyset, \{y\}, \{x,y\}\}, \{\{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}, \{\emptyset, \{x\}, \{x,y\}\}, \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}\}$

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

a) $(x, y) \in A \times B$ (F) $A \times B = \emptyset$ 0,2

b) $(x, y) \subseteq P(A \cup B)$ (V)

$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ é subconjunto de $P(A \cup B)$

(é só ver que $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ é elemento de $P(P(A \cup B))$)

(0,2) $B - A = B - \emptyset = B$

c) $(x,y) = x \times (B-A)$ (F) $\{x\} \times \{x,y\} = \{(x,x),(x,y)\}$

o certo seria $\{(x,x),(x,y)\} = \{x\} \times (B-A)$ (0,1)

d) $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ (V) (0,2)

ver acima $\{\{x\},\{x,y\}\}$ é elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

e) $(y,x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ (F) (0,2)

$(y,x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

6ª questão Paradoxo de Russel

Prova:

Suponha, por contradição que N é um conjunto. Temos duas possibilidades: N é um conjunto ordinário ou N não é ordinário.

Caso 1: Suponha que N é ordinário, ou seja, $N \notin N$, como $N = \{A; A \notin A\}$ teríamos que $N \in N$, uma contradição

Caso 2: Suponha que N não é ordinário, ou seja $N \in N$. Pela definição de N, se $N \in N$ então N é ordinário, isto é, $N \notin N$ contradição

Em qualquer dos dois casos existe uma contradição. Logo é absurdo supor que N é um conjunto. Portanto N não é um conjunto ∎