2ª PROVA MATEMÁTICA PARA ECONOMIA I - GABARITO

① a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{\text{L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \overset{\text{L'Hôspital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4^2-4}{4-2} = \frac{16-4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

② a) $$f(x) = \frac{3}{7x} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{0-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{7x^2} - \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\left(-\frac{\cancel{2}}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{7x^2} + \frac{\sqrt{3}}{x^3}$$

b) $$y = 3^x\sqrt{x^2+4}$$

$$y' = (3^x)'\sqrt{x^2+4} + 3^x\left(\sqrt{x^2+4}\right)'$$

$$y' = 3^x \ln 3 \sqrt{x^2+4} + 3^x \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}(\cancel{2}x)$$

$$y' = 3^x \ln 3 \sqrt{x^2+4} + \frac{3^x \cdot x}{\sqrt{x^2+4}}$$

③ $R'(x) = 200 - 4x$ (Taxa de variação instantânea da receita em relação a x

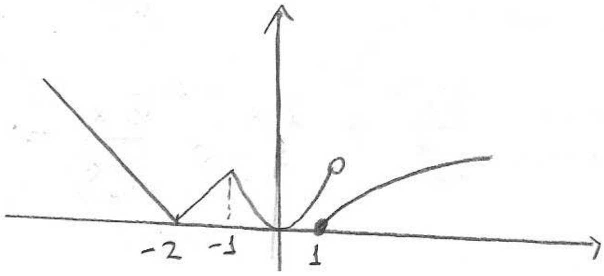
$C'(x) = 40$ (Custo marginal)

$R'(x) = C'(x) \Rightarrow 200 - 4x = 40 \Rightarrow 200 - 40 = 4x$

$x = 40$

Resposta: 40 unidades

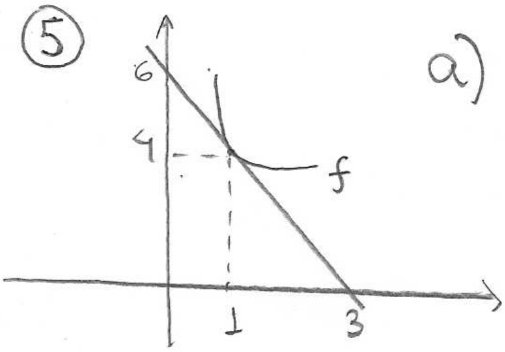
④



Em $x=-2$ e $x=-1$ o gráfico apresenta uma quina, então o gráfico de f não terá tangente nesses pontos uma vez que se tentarmos calcular $f'(-2)$ ou $f'(-1)$ obtemos que as derivadas laterais são diferentes

em $x=1$ f é descontínua logo não é diferenciável

⑤



a) Pelo gráfico a reta tangente a f em $x=1$ passa pelos pontos $(3,0)$ e $(0,6)$

$$m = \frac{6}{-3} = -2$$ (inclinação da reta tangente a f em $x=1$)

Temos que $f'(1) = -2$ uma vez que a derivada indica a inclinação da reta tangente

A reta tem inclinação $m=-2$ e passa por $(3,0)$ então

$$y-0 = -2(x-3) \Rightarrow y = -2x+6$$

Em $x=1$ o valor da função coincide com a reta tangente neste ponto logo $f(1) = -2 \cdot 1 + 6 = 4$ (o que também pode ser visualizado direto no gráfico)

⑤ continuação

b) $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = g(f(x))$

Equação da reta tangente ao gráfico de $h(x)$ em $x=1$.

$$y - h(1) = h'(1)\,(x-1) \qquad (*)$$

$$h(1) = g(f(1)) = g(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$h'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(4) \cdot (-2) = \frac{1}{2\sqrt{4}}(-2) = \frac{-1}{2}$$

$$\left(\text{usamos que } g'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Substituindo os valores de $h(1)$ e $h'(1)$ em $(*)$ obtemos

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$