Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00147 - Matemática para Economia III

3ª Lista de Exercícios – Equações Diferenciais Ordinárias

1. Para cada uma das EDO's abaixo: mostre que a EDO é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais

a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4t - t^3}{4 + y^3}$

b) $\dfrac{dy}{dt} = (1 - 2t)y^2$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(1 - 2t)}{y}$

2. Encontre a solução explícita dos P.V.I abaixo e escreva em qual intervalo a solução está definida

a) $\dfrac{dy}{dt} = (1 - 2t)y^2,\ y(0) = -\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(1 - 2t)}{y},\ y(1) = -2$

3. Determine se cada uma das equações é exata. Para as exatas encontre a solução.

a) $(2t + 3) + (2y - 2)\dfrac{dy}{dt} = 0$

b) $(2t + 4y) + (2t - 2y)\dfrac{dy}{dt} = 0$

c) $(t \ln y + ty) + (y \ln t + ty)\dfrac{dy}{dt} = 0,\ t > 0,\ y > 0$

d) $\dfrac{t}{(t^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y}{(t^2 + y^2)^{3/2}}\dfrac{dy}{dt} = 0$

4. Verifique que a equação abaixo não é exata

$$(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0. \quad (*)$$

Apesar desta equação não ser exata podemos reduzi-la á uma equação exata multiplicando por um fator integrante $\mu(t,y)$ (as situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função exclusiva só de t ou só de y). Fazendo em (*) $M(t,y)=3ty+y^2$ e $N(t,y)=(t^2+ty)$ e multiplicando por μ obtemos

$$\mu M(t,y) + \mu N(t,y)y' = 0 \quad (**)$$

Para que esta equação seja exata temos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N).$$

Por exemplo, se μ for uma função só de t temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \mu\frac{\partial M}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t}(\mu N) = \mu\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{d\mu}{dt}N$$

Então para que a equação (**) seja exata é necessário que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{M_y - N_t}{N}\mu \text{, onde } M_y = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ e } N_t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Resolvendo a EDO acima para μ obtemos o fator integrante que quando multiplicado por $(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0$ resultará numa EDO exata. Com base nesta explicação obtenha um fator integrante μ e resolva a equação exata resultante.

5. **Equações de Bernoulli.** Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e $n = 1$.
    (b) Mostre que, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$

GABARITO

1. a) $y^4 + 16y + t^4 - 8t^2 = c$

2. a) $y = \dfrac{1}{t^2 - t - 6}, -2 < t < 3$

b) $y = -\sqrt{2t - 2t^2 + 4}, -1 < t < 2$

3. a) $t^2 + 3t + y^2 - 2y = c$

b) não é exata

c) não é exata

d) $t^2 + y^2 = c$

4. $\mu(t) = t$

$t^3 y + \dfrac{1}{2}t^2 y^2 = C$

5. 28. $y^2 = \dfrac{5t}{2 + 5Ct^5} \Rightarrow y = \pm\left(\dfrac{5t}{2 + 5Ct^5}\right)^{1/2}$