Matemática Discreta 2013/2
Profa. Ana Maria Luz

Exercícios: Relação de Ordem e Função (Função Parcial e Função Total)

1. Seja (A, R) um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq A$. Defina **limite superior** de X em A segundo R, diga quais condições para dizermos que **X é limitado superiormente** em A segundo R e defina **supremo** de X em A segundo R.

2. Considere a relação *"x divide y"* em A={1,2,3,6,12,18}.
a) Escreva os pares ordenados *(x,y)* pertencentes a essa relação.
b) Desenhe o diagrama de Hasse para a relação *"x divide y"* em A={1,2,3,6,12,18}.
c) A possui elementos minimais segundo a relação *"x divide y"?* Caso afirmativo: quais?
d) A possui elementos mínimo segundo a relação *"x divide y"?* Caso afirmativo: qual?
e) A possui elementos maximais segundo a relação *"x divide y"?* Caso afirmativo: quais?
f) A possui elementos máximo segundo a relação *"x divide y"?* Caso afirmativo: qual?
Seja $X=\{2,3,6\} \subseteq A$
g) X é limitado inferiormente em A, segundo a relação *"x divide y"?*
h) X é limitado superiormente em A, segundo a relação *"x divide y"?*
i) X possui ínfimo em A, segundo a relação *"x divide y"?*
j) X possui supremo em A, segundo a relação *"x divide y"?*

3. a) Ler as proposições enunciadas no Slide da aula 15 sobre Funções disponível no link:
Slides de Aulas/Listas de Exercícios(Geral de todas as turmas)
Disponível em: http://www.professores.uff.br/anamluz/disciplinas/m_dis13_2.html
b) Demonstrar (provar) as proposições ali enunciadas.

4. a) Exiba dois exemplos de relações que são injetivas (um deles sendo uma endorrelação) e construa suas matrizes e no caso da endorrelação construa também o grafo.
b) Exiba dois exemplos de relações que são sobrejetivas (um deles sendo uma endorrelação) e construa suas matrizes e no caso da endorrelação construa também o grafo.

5. A relação reversa de uma função não necessariamente é uma função. Seja $f:\{0,1,2\}\to\{0,1\}$ dada por $f=\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$. Ache a relação reversa f^{-1} e verifique que ela não é função (não é funcional). Em que condições a reversa de uma função (função total) é uma função?
6. Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}
a) Para cada item abaixo, faça o seguinte:
- Justifique por que são funções parciais;
- Determine o domínio de definição e o conjunto imagem;
- Determine se a função é injetiva ou não-injetiva, sobrejetiva ou não sobrejetiva

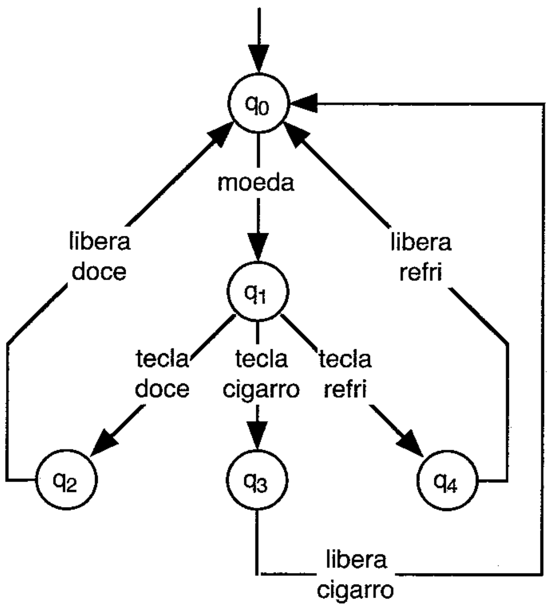
a.1) $\varnothing: A\to B$
a.2) $\{(0,a),(1,b)\}: C\to B$
a.3) $=: A\to B$
a.4) $x^2: \mathbb{Z}\to \mathbb{Z}$ tal que $x^2=\{(x,y)\in \mathbb{Z}^2 ; y=x^2\}$
b) Justifique por que não são funções parciais:
b.1) $A \times B: A\to B$
b.2) $<: C\to C$

7. Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}
a) Para cada item abaixo, faça o seguinte:
- Justifique por que são funções (funções totais);
- Determine o domínio de definição e o conjunto imagem;
- Determine se a função é injetiva ou não-injetiva, sobrejetiva ou não sobrejetiva

a.1) $=: A\to B$
a.2) $id_B: B\to B$
a.3) $\varnothing: \varnothing \to\varnothing$
a.4) $x^2: \mathbb{Z}\to \mathbb{Z}$ tal que $x^2=\{(x,y)\in \mathbb{Z}^2 ; y=x^2\}$
b) Justifique por que não são funções:
b.1) $\varnothing: A\to B$

b.2) $\{(0,a),(1,b)\}: C \to B$
b.3) $A \times B: A \to B$
b.4) $<: C \to C$

8) Prove que:
a) Sejam $R:A \to B$ e $S:B \to C$ relações funcionais. Então a relação composta $S \circ R:A \to C$ $(R;S:A \to C)$ é uma relação funcional (Composição de Funções parciais é parcial)
(Sugestão: ver teorema 5.2 do P. Menezes)
b) Sejam $R:A \to B$ e $S:B \to C$ relações totais. Então a relação composta $S \circ R:A \to C$ $(R;S:A \to C)$ é uma relação total (Composição de Funções totais é Total)
(Sugestão: ver teorema 5.13 do P. Menezes)
9) Todo autômato finito (sistema de estados finitos e pré-definidos o qual c onstitui um modelo computacional do tipo seqüencial) pode ser definido como uma função parcial. Considere o autômato finito ilustrado na figura abaixo o qual representa interface "homem X máquina" de uma máquina de vendas de refrigerante, cigarro e doce.



- Com origem no estado q_o, ao receber a informação "moeda", o autômato assume o estado q_1;
- No estado q_1, ao receber a informação "tecla doce", o autômato assume o estado q_2.

Portanto, dependendo do estado corrente e da informação lida, o autômato assume um novo estado. Traduzindo os itens acima como pares ordenados, obtem-se respectivamente:
$((q_o,\text{moeda}),q_1)$ e $((q_1,\text{tecla\_doce}),q_2)$
Assim, cada par ordenado acima é tal que:

- A primeira componente é um par ordenado, o qual define o estado corrente e a informação lida;
- A segunda componente é o novo estado.

Portanto, o autômato finito acima pode ser definido como uma função parcial, denominada de *função programa* :

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

supondo que:
$Q=\{q_o,q_1,q_2,q_3,q_4\}$
Σ ={moeda,tecla_doce,tecla_cigarro,tecla_refri,libera_doce,libera_cigarro,libera_refri}
RESPONDA: A função parcial do autômato acima é total? É injetora? É sobrejetora?

10) Usando o Princípio da casa dos Pombos
a) Verifique que no Facebook sempre haverá pelo menos duas pessoas que tem a mesma quantidade de amigos.
Resolução: Sabe-se que no Facebook uma pessoa pode ter de 0 a n amigos, sendo que n é o número total de pessoas no Facebook, mas, quando você é amigo de alguém no Facebook, essa pessoa também deve ter você como amigo, logo, se uma pessoa tem "n" como número total de amigos, então, ninguém tem 0, e se uma pessoa tem 0, então ninguém tem "n", pois faltaria a pessoa que tem 0. Assim, temos n pessoas (pombos) para dividir entre n-1 (de 0 a n-1 ou de 1 a n) números de amigos(casas de pombos) e logo, como n = (n-1)+1, está provado que no Facebook, pelo menos duas pessoas terão o mesmo número de amigos sempre, por mais que se adicionem pessoas (desde que existam pelo menos duas pessoas no Facebook).
b) Considere que se todos os pontos de um plano são pintados de amarelo ou verde, prove que podemos encontrar dois pontos de mesma cor que distam exatamente um metro. (Sugestão: ver Princípio da casa dos pombos no Wikipédia)
c) Responda: Quantos estudantes devem ter numa turma para garantir que pelo menos dois estudantes possuam a mesma nota no exame final, se a nota do exame varia entre 0 e 100 pontos?
d) Prove que dados 17 pontos dentro de um quadrado de área 16, existirão ao menos 2 pontos cuja distância de uma para o outro é menor que a raiz quadrada de 2. (Sugestão:Ver artigo: Princípio das Casas de Pombo no Jornal "Dá Licença" , n. 48 disponível em http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/jornais/jornal48novo.pdf)