Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Tópicos de Matemática Aplicada – A1 – 2016.2

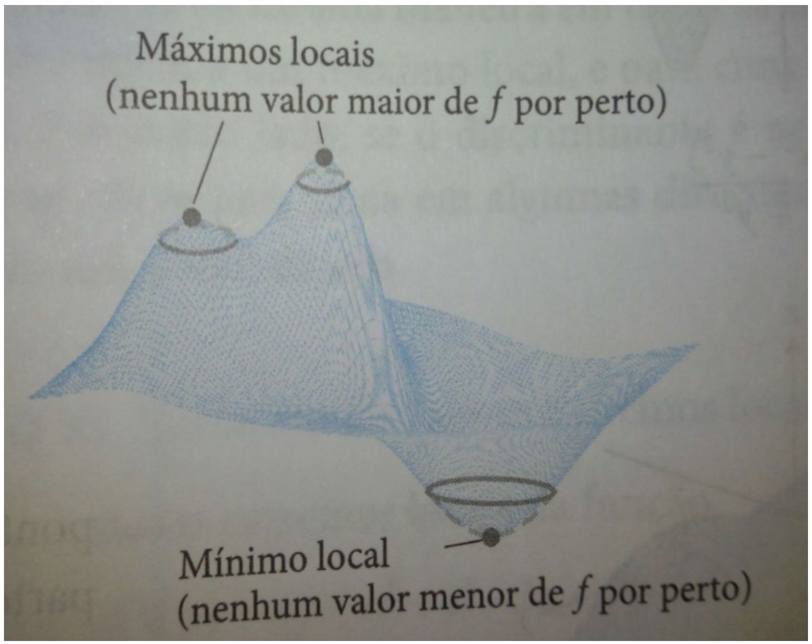
Profa. Ana Maria Luz

Máximos e Mínimos relativos

Definições **Máximo local e mínimo local**

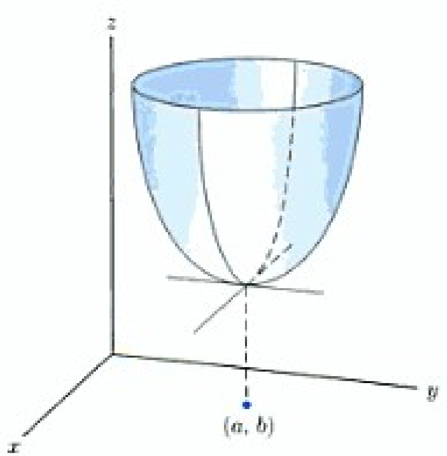
Seja $f(x, y)$ definida em uma região R que contém o ponto (a, b). Então

1. $f(a, b)$ é um valor **máximo local** de f se $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos os pontos do domínio (x, y) em um disco aberto centrado em (a, b).
2. $f(a, b)$ é um valor **mínimo local** de f se $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos os pontos do domínio (x, y) em um disco aberto centrado em (a, b).

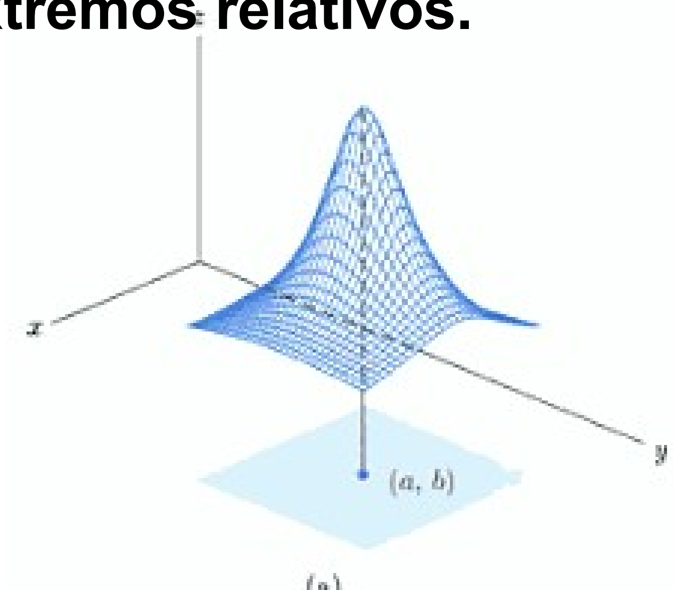


Máximos e Mínimos relativos

Máximos locais correspondem a picos de montanhas na superfície z=f(x,y) e mínimos locais correspondem a vales. Em tais pontos os planos tangentes, quando existem, são horizontais. **Máximos e mínimos locais** são chamados **extremos locais** ou ainda, **extremos relativos.**



Um mínimo local de f ocorre em x=a e y=b



Um máximo local de f ocorre em x=a e y=b

Teste da Derivada de primeira ordem para valores extremos locais

Suponha que ***z=f(x,y)*** tem um extremo relativo no ponto ***(a,b)***. Nesse caso mantendo y fixo com o valor b e deixando x variar, obtemos uma função de uma

variável ***g(x)=f(x,b)*** com

um extremo relativo em ***x=a***.

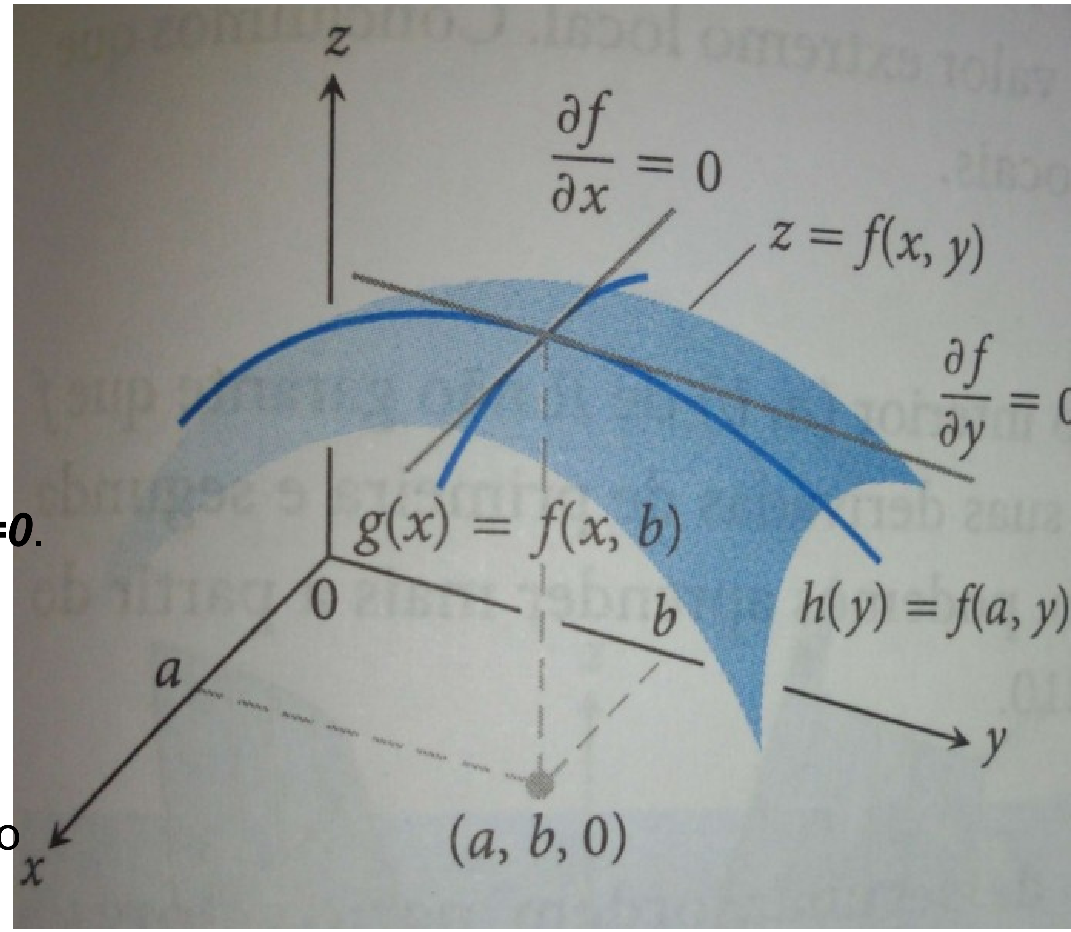
De acordo com o teste da

derivada primeira para

funções de uma variável, a

derivada dessa função deve se

anular em ***x=a***, isto é, $g'(a)=f_x(a,b)=0$.



Da mesma forma, mantendo x fixo

com o valor a e deixando y variar,

obtemos uma função de uma

variável ***h(y)=f(a,y)*** com um extremo

relativo em ***y=b***. Como a

derivada desta função deve se anular em y=b, temos que $h'(b)=f_y(a,b)=0$

Teste da Derivada de primeira ordem para valores extremos locais

Teorema 10 **Teste da derivada de primeira ordem para valores extremos locais**

Se $f(x, y)$ tiver um valor de máximo ou mínimo local em um ponto interior (a, b) do seu domínio e se as derivadas parciais de primeira ordem existirem lá, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

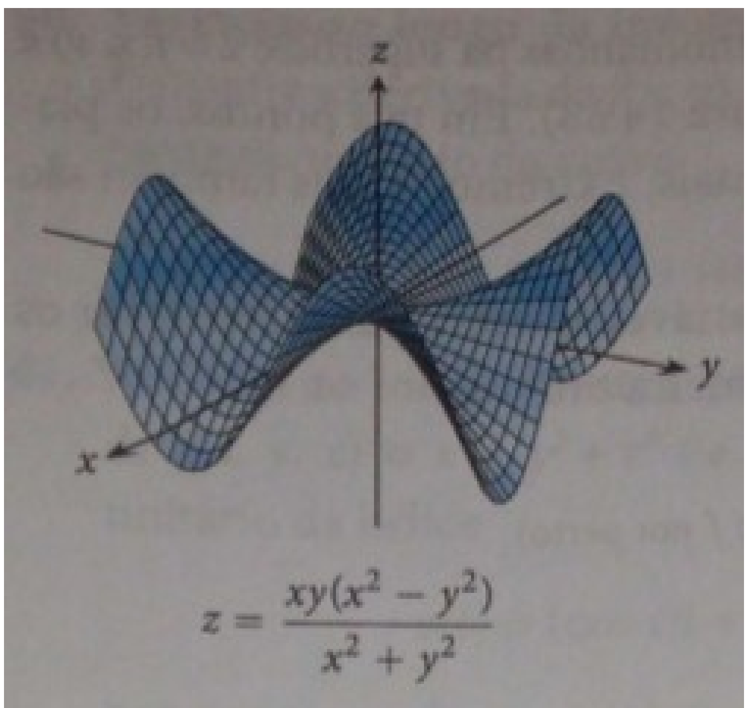
Definição **Ponto crítico**

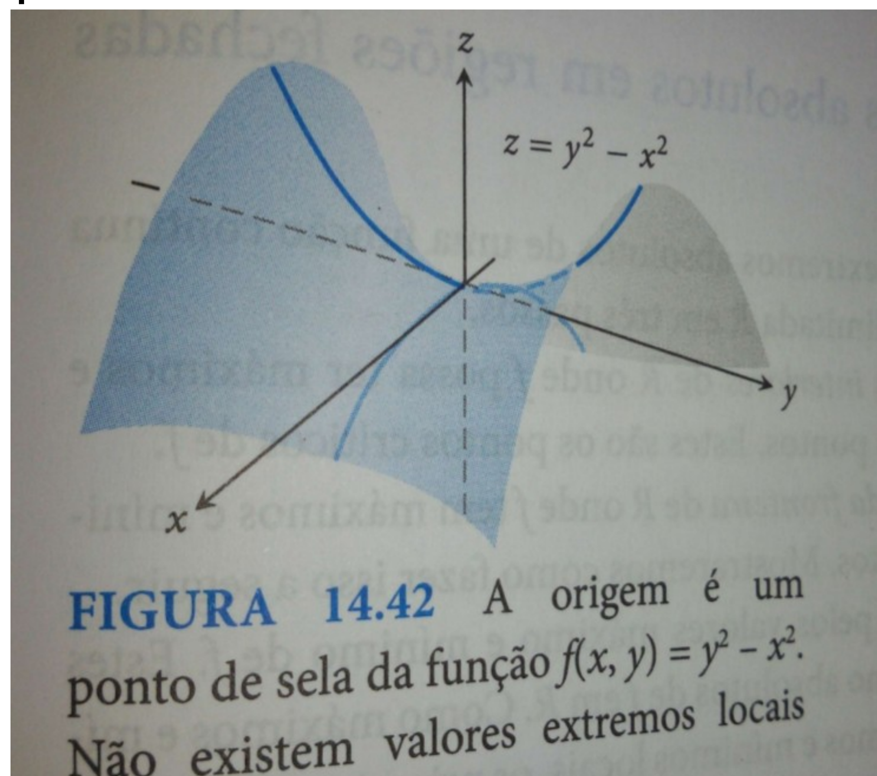
Um ponto interior do domínio de uma função $f(x, y)$ onde tanto f_x como f_y sejam zero ou onde f_x ou f_y ou ambas não existam é um **ponto crítico** de f.

Como ocorre com funções de uma variável, nem todo ponto crítico é um extremos local, como vimos uma função de uma variável pode ter um ponto de inflexão. Uma função diferenciável de duas variáveis pode ter um ***ponto de sela.***

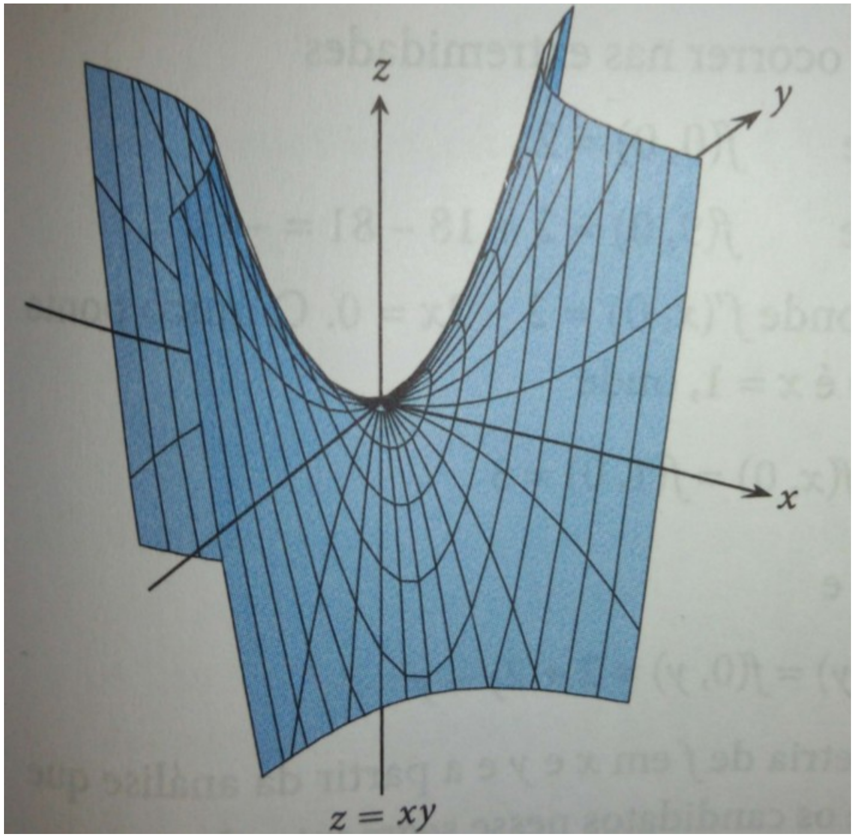
Ponto de sela

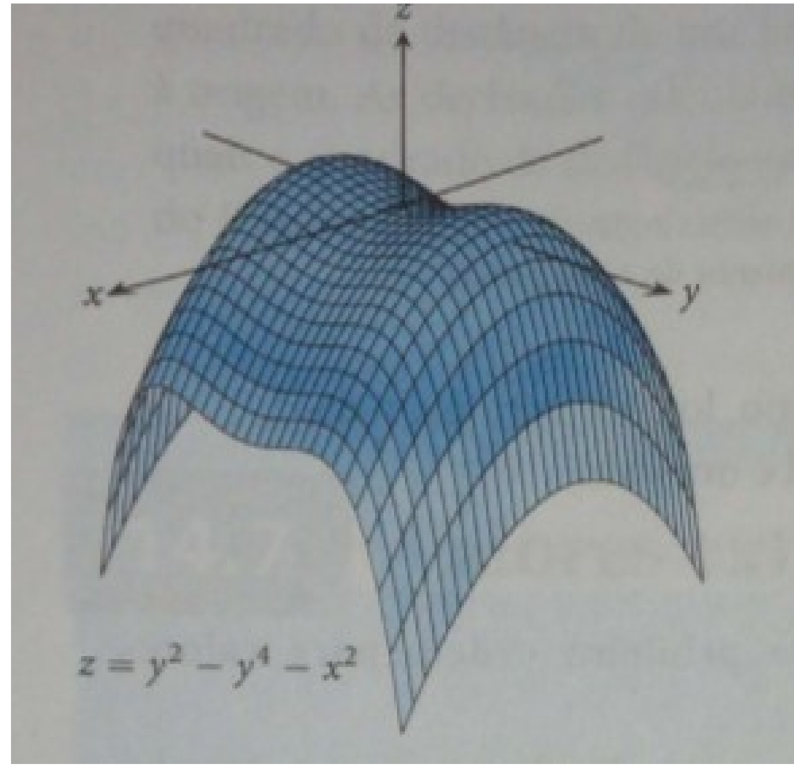
Definição: Uma função diferenciável f(x,y) tem um ponto de sela em um ponto cŕitico (a,b) se em todo disco aberto centrado em (a,b) existem pontos do domínio (x,y) onde f(x,y)>f(a,b) e pontos do domínio (x,y) onde f(x,y)<f(a,b). O ponto correspondete (a,b,f(a,b)) na superfície z=f(x,y) é chamado ponto de sela da superfície.





Ponto de sela





Exemplos

Exemplo 1: (Encontrando valores extremos locais) Encontre os valores extremos locais de $f(x,y)=x^2+y^2$.

Exemplo 1: (Identificando um ponto de sela) Encontre os valores extremos locais (se existirem) de $f(x,y)=y^2-x^2$.

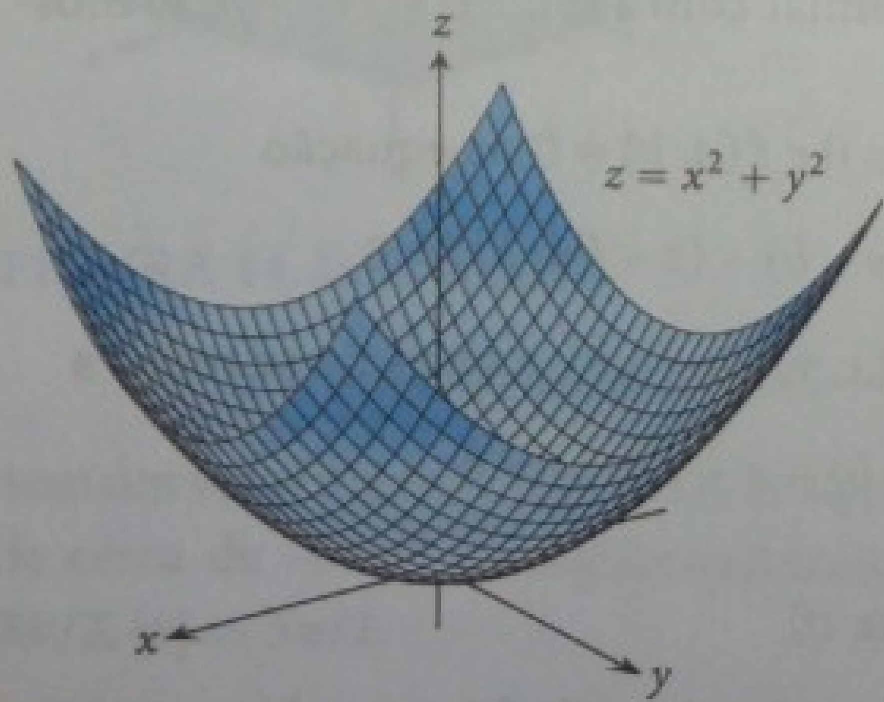


FIGURA 14.41 O gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é o parabolóide $z = x^2 + y^2$. A função tem apenas um ponto crítico, a origem, a qual fornece um valor mínimo local 0 (Exemplo 1).

Teste da derivada segunda ordem para valores extremos locais

O fato que $f_x=f_y=0$ em um ponto (a,b) não garante necessariamente que f tenha um valor extremo local lá. Se f e suas derivadas primeira e segunda forem contínuas em um disco R, podemos usar o seguinte resultado.

Teorema 11 **Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos locais**

Suponha que $f(x, y)$ e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens sejam contínuas em um disco centrado em (a, b) e que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Então

i. f tem um **máximo local** em (a, b) se $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em (a, b).
ii. f tem um **mínimo local** em (a, b) se $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em (a, b).
iii. f tem um **ponto de sela** em (a, b) se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ em (a, b).
iv. **O teste é inconclusivo** em (a, b) se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ em (a, b). Nesse caso, devemos encontrar outra maneira de determinar o comportamento de f em (a, b).

Teste da derivada segunda ordem para valores extremos locais

Seja $D(a,b)=f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2$ temos que

Sinal de D(a,b)	Sinal de $f_{xx}(a,b)$	Comportamento em (a,b)
+	+	Mínimo relativo
+	-	Máximo relativo
-		Ponto de sela

A expressão $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^{\ 2}$ é chamada **discriminante** ou **hessiano de** f. Algumas vezes, é mais fácil lembrar dela na forma de determinante,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{\ 2} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

O Teorema 11 diz que, se o discriminante é positivo em um ponto (a, b), então a superfície se curva da mesma maneira em todas as direções: para baixo se $f_{xx} < 0$, dando origem a um máximo local, e para cima se $f_{xx} > 0$, dando um mínimo local. Por outro lado, se o discriminante é negativo em (a, b), então a superfície se curva para cima em algumas direções e para baixo em outras, assim temos um ponto de sela.

Exemplos

1) Uma combinação de dois medicamentos está sendo testada no combate a certa infecção bacteriana. Os estudos mostraram que a duração de infecção em testes de laboratório pode ser modelada pela função $f(x,y)=x^2+2y^2-18x+2xy+120$, onde x é a dose do primeiro medicamento em centenas de mg e y é a dose do segundo medicamento em centenas de mg. Determine a dose de cada medicamento para que a duração da infecção seja mínima.

Exemplos

2) Certa doença pode ser tratada administrando pelo menos 70 unidades do medicamento C, mas este remédio pode produzir graves efeitos colaterais. Em busca de uma alternativa menos arriscada, um médico decide usar os medicamentos A e B, que não produzem efeitos colaterais se a dose combinada dos dois medicamentos for menor que 60 unidades. O médico sabe que, quando x unidades do medicamento A e y unidades do B são administradas a um paciente, o efeito é equivalente ao de administrar z unidades do medicamento C, onde

$$z = 0{,}05(xy - 2x^2 - y^2 + 95x + 20y)$$

a) Para que doses x e y o nível equivalente z do medicamento C é máximo?

b) Se o médico administrar doses adequadas de A e B, será possível tratar a doença sem efeitos colaterais?

Referências

- Lopes, Carla do N.; Cardoso, Maria Emília N. Apostila de Tópicos de Matemática Aplicada. UFF, 2016.
- Thomas, George B. Cálculo, vol 2. 11 ª edição. São Paulo: Addison Wesley, 2009.