

Tipos Especiais de Relações

(Propriedades de uma endorrelação e
Matrizes e grafos das relações)

Matemática discreta – B1 – 2016.2

Profa. Ana Maria Luz

Alguns resultados:

- **Proposição 1**: Seja R uma endorrelação em A .
 R é reflexiva se, e somente se, $\text{Id}_A \subseteq R$.

Prova feita em sala!

- **Proposição 2**: Seja R uma relação em A , R é simétrica se, e somente se, $R^{-1} \subseteq R$

Prova: Exercício!

- **Proposição 3**: Seja R uma relação em A , R é transitiva se, e somente se, $R \circ R \subseteq R$

Prova feita em Sala!)

Matriz e grafo de relações reflexivas e irreflexivas.

Observe que reflexiva e irreflexiva *não* são noções complementares. De fato, a negação da propriedade reflexiva seria $(\exists a \in A)(\neg(a R a))$ (compare com a definição de irreflexiva). Inclusive, é possível definir uma relação que é:

- *simultaneamente* reflexiva e irreflexiva;
- *não* é reflexiva *nem* irreflexiva.

Matriz:

Reflexiva: a diagonal da matriz contém somente o valor 1 (verdadeiro).

Irreflexiva: a diagonal da matriz contém somente o valor 0 (falso).

Exemplo:

$A = \{0, 1, 2\}$

AxA	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

=	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

Reflexivas

Matriz e grafo de relações reflexivas e irreflexivas.

Exemplo: Relações irreflexivas

$A = \{0, 1, 2\}$

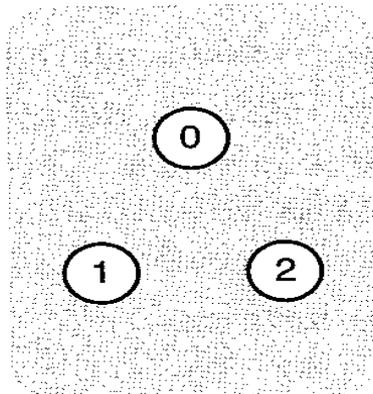
ϕ	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

R	0	1	2
0	0	1	0
1	0	0	1
2	0	1	0

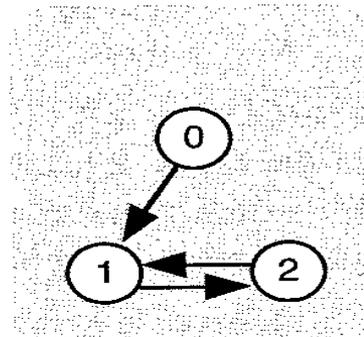
Grafo:

Reflexiva: qualquer nodo tem arco com origem e destino nele mesmo.

Irreflexiva: qualquer nodo NÃO tem um arco com origem e destino nele mesmo.



Grafo de $\phi: A \rightarrow A$ ($A = \{0, 1, 2\}$)



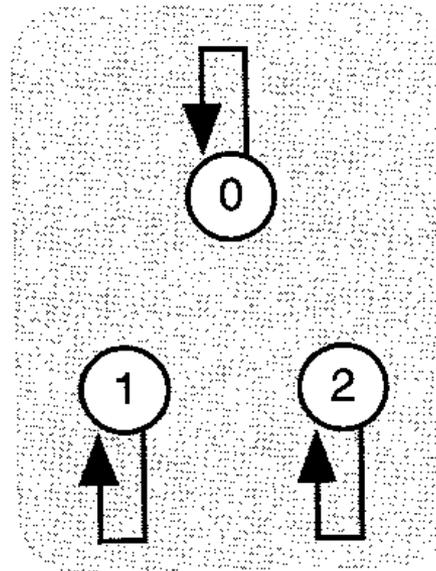
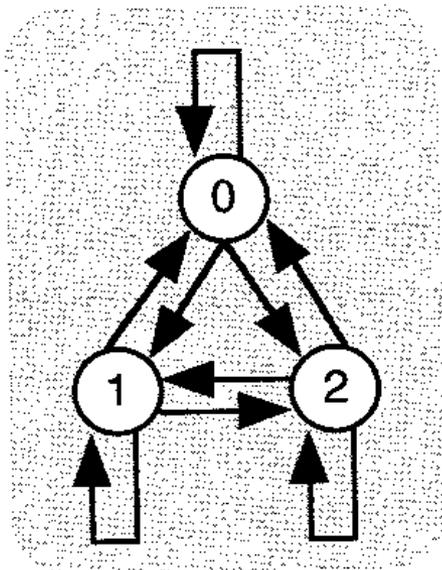
Grafo de $R: A \rightarrow A$ ($A = \{0, 1, 2\}$)

$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Matriz e grafo de relações reflexivas e irreflexivas.

AxA	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

=	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1



Reflexivas

Matriz e grafo de relações simétricas e antissimétricas

Observe que simetria e anti-simetria *não* são noções complementares. De fato, é possível definir uma relação que é simultaneamente simétrica e anti-simétrica.

Matriz:

Simétrica: a metade acima da diagonal da matriz é a imagem espelhada da metade abaixo

Antissimétrica: Para qualquer célula verdadeira (valor 1) em uma das metades da matriz (em relação a diagonal) a correspondente célula na outra metade é falsa

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$

AxA	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

AxA é Simétrica

$S = \{(0,0), (1,1), (1,2)\}$ é antissimétrica

S	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0

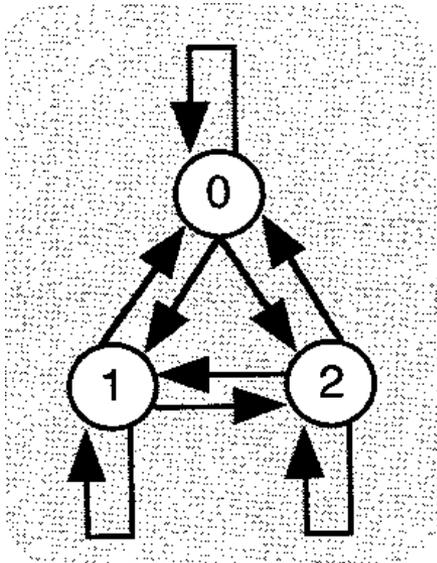
Observe que $=:A \rightarrow A$, é simétrica e antissimétrica

Matriz e grafo de relações simétricas e antissimétricas

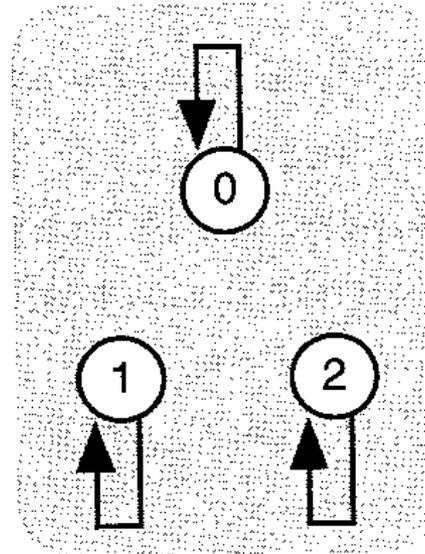
Grafo:

Simétrica: entre dois nodos quaisquer OU NÃO EXISTE seta, ou EXISTEM DUAS setas, uma em cada sentido

Antissimétrica: entre dois nodos quaisquer EXISTE NO MÁXIMO UMA SETA (pode não existir nenhuma seta)



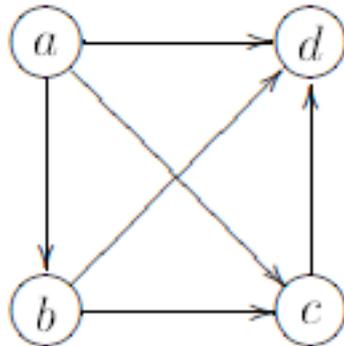
Grafo de $A \times A$, $A = \{0, 1, 2\}$



Grafo de $=: A \rightarrow A$, $A = \{0, 1, 2\}$

Matriz e grafo de uma relação transitiva

- **Matriz:** o entendimento e visualização de uma endorrelação transitiva sobre um conjunto finito) como matriz não é especialmente vantajoso.
- **Grafo:** para qualquer sequência de arcos que saindo de um elemento a chegam a um elemento z existe um arco ligando a e z diretamente.



Seja $B=\{a,b,c,d\}$. Escreva a relação $T:B\rightarrow B$ descrita pelo grafo acima

Matriz e grafo de uma relação transitiva

- Para mais exemplos de grafos de relações transitivas, seja $A=\{0,1,2\}$ reveja os grafos de $A \times A, =:A \rightarrow A$ e faça os grafos de
 - $\leq : A \rightarrow A$
 - $< : A \rightarrow A$

Exercícios

- Lista 11 (2014.2)

Exercícios

Exercício 1.3.2 Sejam R e S relações binárias sobre $A = \{1, 2, \dots, 7\}$ com as representações gráficas mostradas nas figuras 1.7 e 1.8:

1. Indique se R e S são simétricas, reflexivas e/ou transitivas;
2. Indique se $R \cup S$ é simétrica, reflexiva e/ou transitiva.

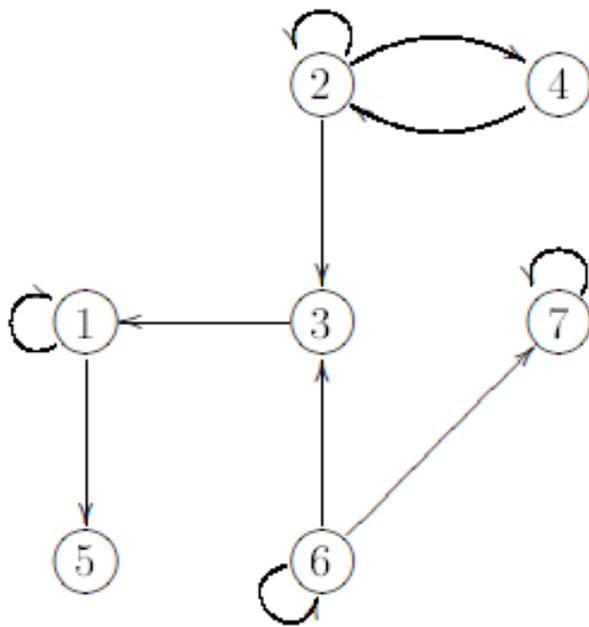


Figura 1.7:

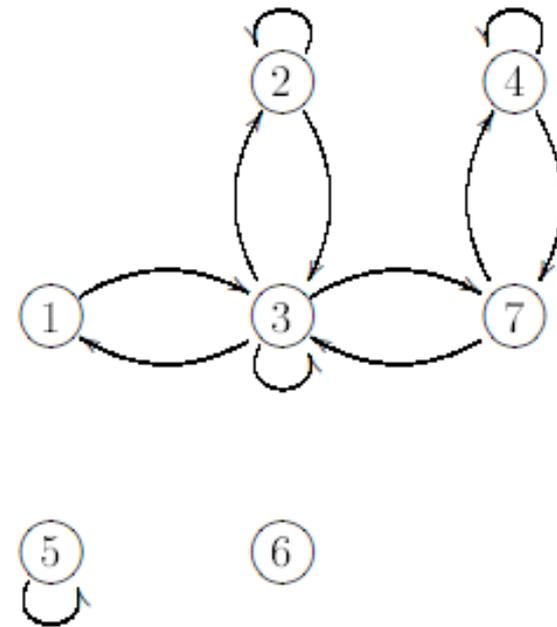


Figura 1.8:

Exercícios

- Lista 11 (2014.2)

Referências

- Paulo B. Menezes, Matemática Discreta para Computação e Informática. 2a. edição , Sagra Luzzatto / Instituto de Informática da UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- . WOLUPECK, Anderson. Notas de aulas de Autômatos e Linguagem: Relações especiais . Download em 20 de maio 2013.
http://www.las.pucpr.br/anderson//arquivos/Aut%C3%B4matos%20e%20Linguagens/menu_automatos.htm