Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Trabalho de Matemática Discreta (A)	Turma C1	2013/1	Prof^a. Ana Maria Luz	Valor 2,0 pts

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas!

1ª Questão Verdadeiro ou Falso? Justifique, apresentando uma prova discursiva ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\, x|y,\, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N};\, x|z,\, z \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N};\, x|yz,\, y, z \in \mathbb{N}\}$ então $A \cup B \subseteq C$. ( )

(b) Sejam $C = \{x \in \mathbb{N};\, x \text{ é primo}\}$, $D = \{x \in \mathbb{N};\, x \text{ é par}\}$ então $C \subseteq D$.( )

2ª Questão Prove as afirmações a seguir por indução:

(a) Seja n um número natural, então

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)(n)}{6}.$$

(b) Seja n um número inteiro positivo, então

$$1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

3ª Questão Usando as identidades básicas envolvendo conjuntos (listadas na folha entregue em sala),faça uma prova algébrica para a seguinte afirmação: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, tais que $A, B, C \subseteq U$ então

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \bar{C}] = A \cup B.$$

4ª Questão Verdadeiro ou Falso? Justifique usando diagramas numerados (apresentando uma prova ou um contra-exemplo).

(a) $\bar{B} \subseteq (A - B)$. (Lembre-se que $A - B = A \cap \bar{B}$)

(b) $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$

5ª Questão Prove:

(a) Por contradição, que inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.

(b) Para todos os conjuntos A, B, temos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $P(A) \subseteq P(B)$

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Trabalho de Matemática Discreta (B)	Turma C1	2013/1	Prof^a. Ana Maria Luz	Valor 2,0 pts

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas!

1ª Questão Verdadeiro ou Falso? Justifique, apresentando uma prova discursiva ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Sejam a e b inteiros. Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$.( )

(b) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\, x|y,\, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N};\, x|z,\, z \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N};\, x|yz,\, y, z \in \mathbb{N}\}$ então $A \cup B \subseteq C$. ( )

2ª Questão Prove as afirmações a seguir por indução:

(a) Seja n um número inteiro positivo, então

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Seja n um número inteiro positivo, então

$$1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

3ª Questão Usando as identidades básicas envolvendo conjuntos (listadas na folha entregue em sala),faça uma prova algébrica para a seguinte afirmação: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, tais que $A, B, C \subseteq U$ então

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \bar{C}] = A \cup B.$$

4ª Questão Verdadeiro ou Falso? Justifique usando diagramas numerados (apresentando uma prova ou um contra-exemplo).

(a) $(A - B) \subseteq \bar{B}$. (Lembre-se que $A - B = A \cap \bar{B}$)

(b) $\overline{(A \cap B)} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

5ª Questão Prove:

(a) Por contradição, que inteiros consecutivos não podem ser ambos ímpares.

(b) Para todos os conjuntos A, B, temos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $P(A) \subseteq P(B)$

GABARITO TRABALHO DE MATEMÁTICA DISCRETA (P1)
TIPO A

(1) a) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\ x|y,\ y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; x|z, z \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N};\ x|yz,\ z \in \mathbb{N}\}$ então $A \cup B \subseteq C$ (V) VERDADEIRO

Prova: Seja $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$

Caso 1. Se $x \in A$ logo $x|y$ então $\exists\ q \in \mathbb{N}$ tal que $y = xq$, deste modo multiplicando por z em ambos os lados obtemos

$$yz = x(qz),$$ ou seja, $x|yz$ Logo $x \in C$

Caso 2: Se $x \in B$ logo $x|z$ então $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $z = xk$, multiplicando ambos os lados por y temos que

$$yz = yxk = x(yk),$$ ou seja, $x|yz$

Logo $x \in C$.

Em qualquer dos casos $x \in C$ Portanto $A \cup B \subseteq C$ ■

b) Sejam $C = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ é primo}\}$, $D = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ é par}\}$ então $C \subseteq D$ (FALSO)

CONTRA-EXEMPLO:

$5 \in C$ (5 é primo) e $5 \notin D$ (5 não é par). Deste modo $C \nsubseteq D$.

② Prove por indução:

a) Seja n um número natural, então

$$P(n): 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)(n)}{6}$$

Prova (por indução em n):

Base da indução. Seja $n=0$ então

$$0^2 = 0 \quad e \quad \frac{(2\,0+1)(0+1)(0)}{6} = 0$$

Logo $0^2 = \dfrac{(2.0+1)(0+1)(0)}{6}$. Portanto $P(0)$ é verdadeiro

Hipótese de indução: Suponho que, para algum $k \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{(2k+1)(k+1)(k)}{6} \quad (P(k) \text{ é verdadeira})$$

Passo da indução: Vamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n = k+1$, isto é, vamos mostrar que:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)(k+1)}{6}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(2k+1)(k+1)(k)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(k) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(2k+3)(k+2)]}{6}$$

$$= \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)(k+1)}{6}$$

Portanto

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)(k+1)}{6}$$

Logo para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $P(n)$ é verdadeira. ∎

TIPO A/B

② b) Seja n um inteiro positivo então:

$$P(n): 1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Prova (por indução em n):

<u>Base da indução</u>: Seja $n=1$. Observe que

$$\frac{1.(3.1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo $P(1): 1 = \frac{1(3.1-1)}{2}$ é verdadeira

<u>Hipótese de indução:</u> Suponho que para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$ tem-se que

$$1+4+7+\dots+(3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2} \quad (P(k) \text{ é verdadeiro})$$

<u>Passo de indução</u>: Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, vamos mostrar que

$$1+4+7+\dots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}
1+4+7+\dots+(3k-2)+(3(k+1)-2) &= \frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2) \\
&= \frac{k.(3k-1)}{2} + \frac{2(3(k+1)-2)}{2} \\
&= \frac{k(3k-1)+6(k+1)-4}{2} \\
&= \frac{3k^2-k+6k+2}{2} \\
&= \frac{3k^2+5k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Portanto

$$1+4+7+\dots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Logo para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ tem-se $P(n)$ verdadeira ■

TIPO A E B

③ Faça uma prova algébrica:

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer tais que $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ então

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}] = A \cup B$$

Prova:

$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}] =$ (P2 - comut.)

$[(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}] =$ (P6 - distrib)

$[(A \cup B) \cap (C \cup \overline{C})] =$ (P10 - def $\mathcal{U}$)

$(A \cup B) \cap \mathcal{U} =$ (P4 - elemento neutro)

$A \cup B$ ■

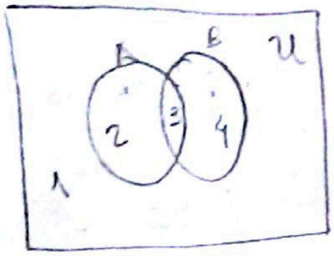
TIPO A

4 a) $\overline{B} \subseteq A - B$ (FALSO)

Como $A-B$, o que está escrito acima é equivalente a $\overline{B} \subseteq A \cap \overline{B}$

a inclusão como está é falsa

Contra-exemplo



$U = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{B} = \{1, 2\}$

$A = \{2, 3\}$

$A \cap \overline{B} = \{2\}$

$\overline{B} = \{1, 2\} \not\subseteq \{2\} = A \cap \overline{B}$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$ (verdadeiro)

Prova:

Seja $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ então $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$

Caso 1 Se $x \in \overline{A}$ então $x \notin A$, deste modo $x \notin A \cap B$ Portanto $x \in \overline{A \cap B}$

Caso 2 Se $x \in \overline{B}$ então $x \notin B$, deste modo $x \notin A \cap B$ Portanto $x \in \overline{A \cap B}$

Em qualquer dos dois casos $x \in \overline{A \cap B}$

Deste modo $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$ ☒

TIPO A

(5) a) Prove, por contradição, que inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.

Prova:

Sejam x e y inteiros consecutivos. Suponha, para uma contradição, que são ambos pares. Como x é par $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k$, como y é consecutivo a x temos que $y = x + 1 = 2k + 1$. Absurdo pois por hipótese y é par. Logo x e y não podem ser ambos pares. $\blacksquare$

b) Prove que para todos os conjuntos A, B temos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $P(A) \subseteq P(B)$.

Prova:

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$ seja $X \in P(A)$ então $X \subseteq A$ e como $A \subseteq B$ temos por transitividade que $X \subseteq B$. Logo $X \in P(B)$. Deste modo $P(A) \subseteq P(B)$

($\Longleftarrow$) Considere $P(A) \subseteq P(B)$ Seja $y \in A$ temos que $\{y\} \subseteq P(A)$, como $P(A) \subseteq P(B)$ por transitividade $\{y\} \subseteq P(B)$. Logo $y \in B$. Desse modo $A \subseteq B$. $\blacksquare$

GABARITO TRABALHO DE MATEMÁTICA DISCRETA

TIPO B

(1) a) Sejam a e b inteiros. Se $a|b$ e $b|a$ então $a=b$ (FALSO)

Contra-exemplo

Se $a=2$ e $b=-2$, $a|b$ e $b|a$ mas sabemos que $a \neq b$ $(2 \neq -2)$

b) Sejam $A=\{x \in \mathbb{N}, x|y, y \in \mathbb{N}\}$

$B=\{x \in \mathbb{N}; x|z, z \in \mathbb{N}\}$

$C=\{x \in \mathbb{N}; x|yz, z \in \mathbb{N}\}$

então $A \cup B \subseteq C$ (Verdadeiro)

Prova.

VER GABARITO TIPO A

(1) a)

TIPO B

(2) a) Seja n um número inteiro positivo então

$$P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Prova (por indução em n)

Base da indução: Seja $n=1$ então

$$1^3 = 1 \quad e \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Logo $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Portanto $P(0)$ é verdadeira

Hipótese de indução: Suponha que para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ tem-se que

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (P(k) \text{ é verdadeira})$$

Passo da indução: Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, vamos mostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}.$$

Pela hipótelose de indução sabemos que

$$1^3 + 2^3 + \quad + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k+2]^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$$

Portanto

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$$

Logo para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ tem-se $P(n)$ verdadeira ∎

TIPO B

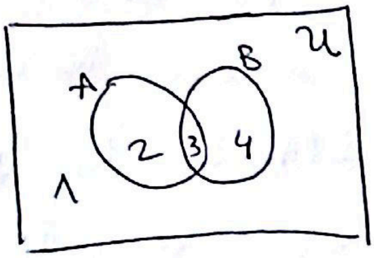
4

a) $(A - B) \subseteq \overline{B}$

Como $A - B = A \cap \overline{B}$. Queremos verificar se

$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$ (VERDADEIRO!)

Prova (por diagramas numerados):



$r(A) = 23$

$r(\overline{B}) = 12$

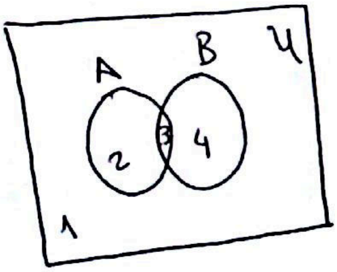
$r(A \cap \overline{B}) = 2$

Como todos os rótulos em $r(A \cap \overline{B})$ aparecem em $r(\overline{B})$ temos que

$$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}. \blacksquare$$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$ (VERDADEIRO!)

Prova (por diagramas numerados):



$r(\overline{A}) = 14$

$r(\overline{B}) = 12$

$r(\overline{A} \cup \overline{B}) = 124$

$r(A \cap B) = 3$

$r(\overline{A \cap B}) = 124$

Como todos os rótulos em $r(\overline{A} \cup \overline{B})$ aparecem em $r(\overline{A \cap B})$ temos que

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}. \blacksquare$$

OBS: A TERCEIRA QUESTÃO DO TRABALHO TIPO B É IGUAL A TERCEIRA QUESTÃO DO TRABALHO TIPO A

5) a) Prove por contradição que inteiros consecutivos não podem ser ambos ímpares.

Prova: Sejam a e b inteiros consecutivos. Suponha para uma contradição que são ambos ímpares. Como a é ímpar $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k+1$. Como b é sucessor de a
$b = a+1 = (2k+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1)$. Absurdo pois por hipótese b é ímpar. Logo a e b não podem ser ambos ímpares. ■

b) Prove que para todos os conjuntos A, B temos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $P(A) \subseteq P(B)$.

Prova:

VER GABARITO TIPO A

5) b)