

Lista de Exercícios – Espaços Vetoriais – Parte II

1- Determine a dimensão e uma base do espaço vetorial $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x-y-2z=0\}$

2- Classifique as afirmações abaixo como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), caso sejam falsas reescreva a afirmação de forma a torná-la verdadeira

- a) A dimensão de qualquer subespaço S do \mathbb{R}^3 só poderá ser 0, 1,2 ou 3. ()
b) $\dim \{0\}=0$. ()
c) Seja $V=U \oplus W$, então $\dim V \neq \dim U + \dim W$. ()
d) Se $\dim V=n$, um subconjunto de V com n vetores é L.D. ()

3- Encontre o vetor coordenada de $v=(4,-3,2)$ em relação a base $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ do \mathbb{R}^3

4- Seja $V= M(2,2)$ (o espaço vetorial das matrizes 2×2). Completar o conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{de modo a formar uma base do } M(2,2)$$

5- Diz-se que uma base $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ de V (espaço vetorial euclidiano) é **ortogonal** se seus vetores são dois a dois ortogonais. Verifique se $B'=\{(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)\}$ é uma base ortogonal do \mathbb{R}^3 .

6. Diz-se que uma base $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ de V (espaço vetorial euclidiano) é **ortonormal** se é ortogonal e se seus vetores são unitários, ou seja:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

Verifique se as bases abaixo são bases ortonormais do espaço vetorial V indicado:

a) $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $V=\mathbb{R}^3$.

b) $B=\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V=\mathbb{R}^2$

7. Seja V um espaço vetorial euclidiano e S um subespaço vetorial de V. O subconjunto de V denotado por:

$$S^\perp = \{v \in V; v \perp S\} = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in S\},$$

que é o subconjunto de V formado pelos vetores que são ortogonais a S, é chamado **complemento ortogonal** de S. Temos as seguintes propriedades: I) S^\perp é subespaço de V, II) $V=S \oplus S^\perp$.

Considerando o produto interno usual no \mathbb{R}^4 , determine o complemento ortogonal do subespaço gerado $S=[(1,1,0,-1),(1,-2,1,0)]$.

Comentário: Um a vez que você tenha encontrado S^\perp , observe que: I) S^\perp é subespaço de \mathbb{R}^4 , II) $\mathbb{R}^4=S \oplus S^\perp$.

GABARITO

1) $B=\{(1,1,0), (2,0,1)\}$ é uma base e $\dim S=2$.

2) a)V b) V c) F d)F 3) $[v]_B=(2,-5,7)$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) B' é um conjunto ortogonal de vetores não nulos, logo é L.I., qualquer subconjunto de \mathbb{R}^3 com n vetores L.I. é uma base do \mathbb{R}^3 .

Lista de Exercícios – Espaços Vetoriais – Parte II - GABARITO

6) a) $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é base ortonormal de $V = \mathbb{R}^3$.

b) $B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$ é base ortonormal de $V = \mathbb{R}^2$

7) $S^\perp = \{(x,y,-x+2y,x+y), x,y \in \mathbb{R}\}$