Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 06118 - Álgebra Linear Aplicada – Turma E1/ Professora Ana Maria Luz

Lista de Exercícios – Transformações Lineares

1- Considere a função Tr: M(n,n)→IR (traço) definida por Tr(A)=$a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$. Mostre que Tr é uma transformação linear.

2- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo}\end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ & & \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} papel \\ \\ tela \end{array} \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T:IR^3 \to IR^2$ definida por T(**x**)=A**x** que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

3- Uma fazenda de café, na safra de 2010, produziu as sacas para embalar os grãos em dois materias diferentes: algodão cru e sintético. Cada saca precisou de uma determinada quantidade de tecido (em m^2) e linha (em metros). As quantidades necessárias são dadas pela matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Alg. cru.} & \text{sintético}\end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 5000 & 6000 \\ 20000 & 240000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Tecido \\ linha \end{array} \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de sacas de algodão cru, x_2 é o número de scas de tecido sintético.

a) Encontre a transformação linear $T:IR^2 \to IR^2$ definida por T(x)=Ax que descreve o quanto de tecido total e linha foram gastos para produzir as sacas.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de tecido gasto pela fazenda para embalar os grãos e em y_2 o total de linha necessária. De acordo com o item a), Qual a expressão do total de tecido utilizado (expressão de y_1 em função de x_1, x_2)? Qual a expressão do total de linha utilizada (expressão de y_2 em função de x_1, x_2)?

4- Seja $T:P_2(IR) \to P_2(IR)$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2+bx+c)=(a+2b)x+(b+c)$$

a) $-4x^2+2x-2$ pertence a N(T)?
b) x^2+2x+1 pertence a Im(T)?
c) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
d) T é injetora?
e) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
f) T é sobrejetora?

5 - Seja $T:M(2,2) \to M(2,2)$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
b) T é injetora?
c) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
d) T é sobrejetora?

6) Dada a transformação linear T: $IR^3 \to IR^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases A={(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)} e B={(3,0), (1,1)} para o IR^3 e IR^2 respectivamente. Determine:
a) $[T]_B^A$
b) Sendo v=(5,1,-2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A\,[v]_A$.

7) Seja a transformação T: $IR^3 \to IR^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.
b) Sejam $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $B=\{e_1,e_2\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^3 e IR^2. Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$) .

8) Sejam T_1: $IR^2 \to IR^3$ e T_2: $IR^2 \to IR^3$ transformações lineares definidas por:
$T_1(x,y)=(x+2y, 2x-y, x)$ e $T_2(x,y)=(-x, y, x+y)$
Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ e $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^2 e IR^3. Encontre:
a) $[T_1]_B^A$ *e* $[T_2]_B^A$
b) $[T_1+T_2]_B^A$

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$

GABARITO - Lista de Exercícios – Transformações Lineares

2) a) $T(x_1,x_2,x_3)=(300x_1+500x_2+800x_3,40x_1+50x_2+60x_3)$
b) $y_1=300x_1+500x_2+800x_3$ gramas de papel e $y_2=40x_1+50x_2+60x_3$ gramas de tela

3) a) $T(x_1,x_2)=(5000x_1+6000x_2, 20000x_1+24000x_2)$
b) $y_1=5000x_1+6000x_2$ m^2 de tecido (algodão cru e sintético) e $y_2=20000x_1+24000x_2$ metros de linha

4) a) sim, verifique que $T(-4x^2+2x-2)=0$ b) não c){2x^2-x+1} é uma base de N(T) , dim N(T)=1
d) não é injetora e){x, 1} é uma base de Im(T), dim N(T)=2 f) não é sobrejetora

5) a) $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$, de modo que N(T) não tem base, dim N(T)=0.

b) T é injetora pois $N(T)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$, c) $\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$, dim Im(T)=4

d) T é sobrejetora

6) a) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ b) $[v]_A=(3,-3,-2)$ então $[T(v)]_B=(1,3)$

7) a) T(x,y,z)=(x+y+z, x+2y +3z)
b) $[T]_B^A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A$=M usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de IR^3 e IR^2.

8) a) $[T_1]_B^A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, [T_2]_B^A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

b) use que $[T_1+T_2]_B^A=[T_1]_B^A+[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

c) use que $[3T_1-2T_2]_B^A=3[T_1]_B^A-2[T_2]_B^A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$