Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00007 – Introdução à Álgebra Linear – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz

Lista de Exercícios – Espaços Vetoriais

1- Classifique as afirmações abaixo como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), caso sejam falsas reescreva a afirmação de forma a torná-la verdadeira

a) O conjunto vazio é linearmente independente. ( )
b) Todo conjunto que contém o vetor nulo é L.I.. ( )
c) Todo conjunto que tem um subconjunto L.D. é L.D.( )
d) Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I. ( )
e) Se um vetor de um conjunto é combinação linear de outros vetores desse conjunto, então o conjunto é L.I. ( )
f) A interseção de dois conjuntos linearmente independentes é linearmente independente - podendo ser o conjunto vazio. ( )
g) A interseção de um número qualquer de conjuntos linearmente independentes não é linearmente independente. ( )
h) A dimensão de qualquer subespaço S do IR^3 só poderá ser 0, 1,2 ou 3. ( )
i) dim {0}=0. ( )
j) Seja $V=U\oplus W$, então dim $V\neq$ dim U +dim W.( )
k) Se dim V=n, um subconjunto de V com n vetores é L.D. ( )

2- Seja $[v_1,v_2]$ o espaço gerado por v_1, v_2 e $v\in [v_1,v_2]$, ou seja, $v=a_1v_1+a_2v_2$, Mostre que:

$$[v_1,v_2]= [v_1,v_2,v]$$

Obs.: Esta idéia pode ser generalizada para $[v_1, ... ,v_n]$, isto é,

$$[v_1, ... ,v_n]= [v_1, ..., v_n,v] \text{ se } v\in [v_1, ..., v_n].$$

3- Verifique se as linhas da matriz abaixo são L.I. ou L.D.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dica: Voce pode usar o seguinte resultado: "As linhas não-nulas de uma matriz na forma escalonada são L.I.", ou escrever as linhas ou colunas da matriz como vetores e usar as técnicas dadas em sala

4- Seja V= M(2,2) (o espaço vetorial das matrizes 2x2). Determine se os vetores A, B, C $\in$ V são L.I ou L.D

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

5- Determine se os seguinte vetores formam uma base do espaço vetorial IR^3:
a) (1, 1, 1) e (1, -1, 5)
b) (1, 1, 1), (1, 2, 3) e (2, -1, 1)
c) (1, 2, 3), (1, 0, -1),(3, -1, 0) e (2, 1, -2)
d) (1, 1, 2), (1, 2, 5) e (5, 3, 4)

6- Determine a dimensão e uma base do espaço vetorial $\{(x, y, z) \in IR^3; x\text{-}y\text{-}2z=0\}$

7- Encontre o vetor coordenada de v=(4,-3,2) em relação a base B={(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)} do IR^3

8- Seja V= M(2,2) (o espaço vetorial das matrizes 2x2). Completar o conjunto $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ de modo a formar uma base do M(2,2)

9- Diz-se que uma base B={v_1,...,v_n} de V (espaço vetorial euclidiano) é ***ortogonal*** se seus vetores são dois a dois ortogonais. Verifique se B'={(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} é uma base ortogonal do IR^3.

10. Diz-se que uma base B={v_1,...,v_n} de V (espaço vetorial euclidiano) é ***ortonormal*** se é ortogonal e se seus vetores são unitários, ou seja:

$$\langle v_i, v_j\rangle=\begin{cases}0 \ para \ i\neq j\\ 1 \ para \ i=j\end{cases}.$$

Verifique se as bases abaixo são bases ortonormais do espaço vetorial V indicado:

a) B={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}, V=IR^3.

b) B=$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, V=$IR^2$

11. Seja V um espaço vetorial euclidiano e S um subespaço vetorial de V. O subconjunto de V denotado por:

$$S^{\perp}=\{v\in V; v\perp S\}=\{v\in V;\langle v,w\rangle=0\,\forall w\in S\},$$

que é o subconjunto de V formado pelos vetores que são ortogonais a S , é chamado ***complemento ortogonal*** de S. Temos as seguintes propriedades: I) $S^{\perp}$ é subespaço de V, II) V=$S\oplus S^{\perp}$.

Considerando o produto interno usual no IR^4, determine o complemento ortogonal do subespaço gerado S=[(1,1,0,-1),(1,-2,1,0)].

Comentário: Um a vez que você tenha encontrado $S^{\perp}$, observe que: I) $S^{\perp}$ é subespaço de IR^4, II) IR^4=$S\oplus S^{\perp}$.

GABARITO

1) a)V b) F c) V d)V e) F f) V g) F h)V i) F j)V 3) L.I.

4) a) L.I. b) L.D.

5) a) não b) sim c) não d) não

6) B={(1,1,0), (2,0,1)} é uma base e dim S=2.

7) $[v]_B$=(2,-5,7) 8) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

9) B' é um conjunto ortogonal de vetores não nulos, logo é L.I., qualquer subconjunto de IR^3 com n vetores L.I. é uma base do IR^3.

10) a) B={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} é base ortonormal de V=IR^3.

b) B=$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é base ortonormal de V=IR^2

11) $S^{\perp}$={(x,y,-x+2y,x+y),x,y $\in$ IR}