Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00007 – Introdução à Álgebra Linear – Turma A1/ Professora Ana Maria Luz

Lista de Exercícios – Operadores Lineares

1- Seja $T:IR^2 \to IR^2$ um operador linear ortogonal definido por

$$T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y,-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

e $B_1=\{e_1,e_2\}$ a base canônica do IR^2, encontre a partir de B_1 uma base ortonormal para o IR^2, usando o seguinte resultado:
"Um operador linear ortogonal T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é base ortonormal de V então $\{T(v_1),T(v_2), ...,T(v_n)\}$ é também base ortonormal de V"

2- Sejam T_1: $IR^2 \to IR^2$ e T_2: $IR^2 \to IR^2$ operadores lineares definidas por:

$T_1(x,y)=(x+y, -x+y)$ e $T_2(x,y)=(x, -x)$

Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ base canônica do IR^2 e $B=\{(3,1),(-3,1)\}$ outra base do IR^2

a) $[T_1]_B^A \; e \; [T_2]_B^A$

b) $[T_1+T_2]_B^A$ (dica: use que $[T_1+T_2]_B^A=[T_1]_B^A+[T_2]_B^A$)

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$ (dica: use que $[3T_1-2T_2]_B^A=3[T_1]_B^A-2[T_2]_B^A$)

d) $[T_1\circ T_2]_B^A$ (você pode usar que: $[T_1\circ T_2]_B^A = [T_1]_B^A.[T_2]_B^A$)

3- Construa um exemplo do seguinte resultado: " A composta de duas transformações ortogonais é ortogonal, ou seja, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal".

4- A seguir dados operadores lineares T em IR^2. Verificar quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determinar uma fórmula para T^{-1}.

a) T: $IR^2 \to IR^2$, T(x,y)=(3x-4y,-x+2y)
b) T: $IR^2 \to IR^2$, T(x,y)=(x-2y,-2x+3y)
c) T: $IR^2 \to IR^2$, T(x,y)=(2x-y,-4x+2y)

5- Consideremos as seguintes bases do IR^2: A={(1,1),(0,-1)} e B={(2,-3),(-3,5)}.
a) Determinar a matriz de mudança de base: $[I]_B^A$.
b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_B$, sendo $[v]_A=(2,3)$.
c) Determinar a matriz de mudança de base de B para A.

6- Seja T: $IR^2 \to IR^2$ um operador linear. Consideremos as bases A canônica e B={(4,1),(-11,-3)}. Sabendo que

$$[T]_B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Determinar $[T]_A$, utilizando a relação entre matrizes semelhantes.

7- Determinar a e b para os seguintes operadores no IR^3 sejam simétricos
a)T: $IR^3 \to IR^3$, T(x,y,z)=(3x-2y,ax+y-3z,by+z)
b)T: $IR^3 \to IR^3$, T(x,y,z)=(x+2z,ax+4y+bz,2x-3y+z)

GABARITO

1- $B_2=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

4- a) $T^{-1}(x,y)=(x+2y,\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y)$

b) $T^{-1}(x,y)=(-3x-2y,-2x-y)$

c) T não é inversível

5- a) $[I]_B^A=\begin{bmatrix}8 & -3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

b) $[v]_B=(7,4)$

c) $[I]_A^B=([I]_B^A)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -8\end{bmatrix}$

6- $[T]_A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

7- a) a=-2 e b=-3

b) a=0 e b=-3