

Lista de Exercícios – Transformações Lineares

1- Considere a função $\text{Tr}: M(n,n) \rightarrow \mathbb{R}$ (traço) definida por $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$. Mostre que Tr é uma transformação linear.

2- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{ccc} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \\ A = \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{papel} \\ \text{tela} \end{array} \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ax$ que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

3- Uma fazenda de café, na safra de 2010, produziu as sacas para embalar os grãos em dois materiais diferentes: algodão cru e sintético. Cada saca precisou de uma determinada quantidade de tecido (em m^2) e linha (em metros). As quantidades necessárias são dadas pela matriz:

$$\begin{array}{cc} \text{Alg. cru.} & \text{sintético} \\ A = \begin{bmatrix} 5000 & 6000 \\ 20000 & 240000 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Tecido} \\ \text{linha} \end{array} \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de sacas de algodão cru, x_2 é o número de sacas de tecido sintético.

a) Encontre a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ax$ que descreve o quanto de tecido total e linha foram gastos para produzir as sacas.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de tecido gasto pela fazenda para embalar os grãos e em y_2 o total de linha necessária. De acordo com o item a), Qual a expressão do total de tecido utilizado (expressão de y_1 em função de x_1, x_2)? Qual a expressão do total de linha utilizada (expressão de y_2 em função de x_1, x_2)?

4- Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2+bx+c)=(a+2b)x+(b+c)$$

a) $-4x^2+2x-2$ pertence a $N(T)$?

b) x^2+2x+1 pertence a $\text{Im}(T)$?

5) Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases $A=\{(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$ e $B=\{(3,0), (1,1)\}$ para o \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente. Determine:

a) $[T]_B^A$

b) Sendo $v=(5,1,-2)$ (coordenadas em relação à base canônica do \mathbb{R}^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A [v]_A$.

6) Seja a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.

b) Sejam $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $B=\{e_1, e_2\}$ as bases canônicas respectivamente do \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 . Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$).

GABARITO - Lista de Exercícios – Transformações Lineares

2) a) $T(x_1, x_2, x_3)=(300x_1+500x_2+800x_3, 40x_1+50x_2+60x_3)$

b) $y_1=300x_1+500x_2+800x_3$ gramas de papel e $y_2=40x_1+50x_2+60x_3$ gramas de tela

3) a) $T(x_1, x_2)=(5000x_1+6000x_2, 20000x_1+24000x_2)$

b) $y_1=5000x_1+6000x_2$ m² de tecido (algodão cru e sintético) e $y_2=20000x_1+24000x_2$ metros de linha

4) a) sim, verifique que $T(-4x^2+2x-2)=0$ b) não

5) a) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $[v]_A=(3,-3,-2)$ então $[T(v)]_B=(1,3)$

6) a) $T(x,y,z)=(x+y+z, x+2y+3z)$

b) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, é claro que $[T]_B^A=M$ usada na definição de T pois A e B são as bases canônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .