Exercícios de Revisão I - Matemática Discreta	Turma B2/C2/A2	2011/2	Prof^a. Ana Maria Luz

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas!

1ª Questão Considere os conjuntos a seguir:
A: O conjunto de todos os naturais divisores de 24.
B: O conjunto de todos os naturais divisíveis por 24.
C: O conjunto de todos os naturais divisores de 24 que são números pares.
D: O conjunto cujo único elemento é $\emptyset$.
E: O conjunto de todos os inteiros ímpares maiores que 1 e menores que 6.
F: O conjunto cujos únicos elementos são 0 e $\emptyset$.

(a) Defina estes conjuntos por lista, usando a notação explicada em aula.

(b) Defina estes conjuntos por propriedade, usando a notação explicada em aula.

2ª Questão Verdadeiro ou Falso? Justifique, apresentando uma prova discursiva ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\, x\, \text{é par e divisível por } 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N};\, x\, \text{é divisível por } 6\}$, então $A \subseteq B$.

(b) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\, 2|x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N};\, 4|x\}$, então $A \subseteq B$.

(c) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\, x|y,\, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N};\, x|z,\, z \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N};\, x|yz,\, y, z \in \mathbb{N}\}$ então $A \cup B \subseteq C$.

Para quaisquer conjuntos A, B e C, temos que:

(d) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$.

(e) $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

3ª Questão Prove por indução que:

(a) Para qualquer natural $n \geq 2$, $n^2 > n + 1$.

(b) Todo número natural maior ou igual a 2 pode ser escrito como produto de números primos. (Dica: Indução forte)

4ª Questão Considerando as propriedades básicas dadas a segui, prove algebricamente que, para todos os conjuntos A, B e C, temos que

$$\text{se} \quad A \subseteq B \cup C \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset, \text{ então} \quad A \subseteq C$$

Propriedades básicas para quaisquer conjuntos A, B e C, temos que:

(P1) $A \cap A = A$

(P2) $A \subseteq B \to A \cap C \subseteq B \cap C$

(P3) $A \cap B = B \cap A$

(P4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(P5) $A \cup B = B \cup A$

(P6) $A \cup \emptyset = A$

(P7) $A \cap B \subseteq A$

5ª Questão Prove, usando diagramas numerados que, para todos os conjuntos A, B e C, temos:

$$A \cap \overline{B \cup C} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$$

6ª Questão (Paradoxo de Barbeiro) Considere uma aldeia onde, todos os dias, um barbeiro faz a barba de todos os homens que não se barbeiam sozinhos e não faz a barba de quem se barbeia sozinho. Isso vale para todos que estão na aldeia. Prove que esta aldeia não existe! (Dica: Prova por absurdo! Prova por casos!)

7ª Questão Prove que para todos os conjuntos A, B e C, temos que

$$A \subseteq B \quad \text{se, e somente se} \quad P(A) \subseteq P(B)$$

8ª Questão Sejam os conjuntos A, B e C. Prove:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C.)$

O que você achou destes exercícios de revisão? Fácil? Difícil? Se a prova tivesse este número de questões você conseguiria fazer em 1h e 45min?