Universidade Federal Fluminense
Departamento de Análise
GAN00145 – Matemática para Economia 1
Professora Ana Maria Luz
2001.1

Unidade 1 – Revisão de função de uma variável real

O objeto fundamental deste curso são as funções de uma variável real. As funções surgem quando uma quantidade depende de outra.

Exemplo 1.1:
• O custo **C** de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso **w**. O correio tem uma fórmula que permite calcular **C** quando é dado **w**.
• A área de um círculo depende do seu raio **r**. A lei que conecta **r** e **A** é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número **r** positivo existe um único valor de **A** e dizemos que **A** é uma função de **r**.

Uma função pode ser representada de várias maneiras por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou mesmo por meio de palavras.

Definição 1.1: Uma função *f* é uma lei a qual cada elemento x em um conjunto **A** faz corresponder apenas um elemento chamado *f(x)* em um conjunto **B**. O conjunto **A** é o **domínio** da função e o conjunto **B** é o **contradomínio**.

Observação: As funções estudadas neste curso têm como domínio e contradomínio conjuntos de números reais.

Definição 1.2: Chamamos conjunto **imagem** de f ao conjunto de todos os valores possíveis de f(x) quando x varias por todo o domínio.

Exemplo 1.2: Sejam A=[-1,1], B=$\mathbb{R}$ e *f*:A→B dada por *f(x)=x+3*. Determine:
a) *f(-1)* b)*f(0)* c)*f(1)*
d) o conjunto imagem de f

Destacamos algumas das funções com as quais trabalharemos ao longo do curso: polinômios, função exponencial e função logarítmica.

1.1 Polinômios

Uma função P é denominada polinômio se
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$,
onde n é um inteiro não negativo e os números $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas coeficientes do polinômio.

O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o grau do polinômio é n.

Exemplo 1.3: $P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$ é um polinômio de grau 6.

*** Polinômio de grau 1 (Função do 1º grau)**

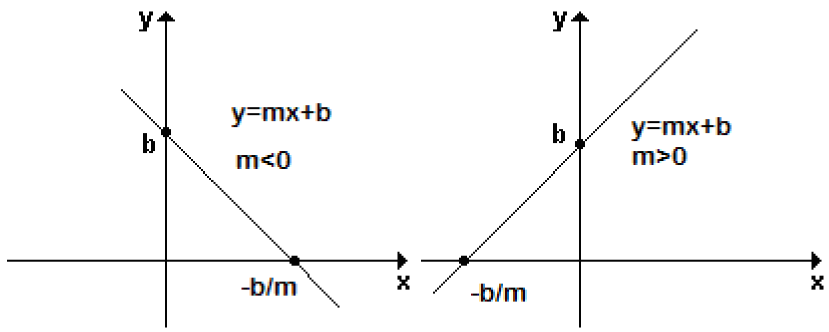
A equação de uma função do 1º grau pode ser escrita na forma:

$$y=mx+b;$$

onde m e b são constantes.

Propriedades da função do 1º grau :

1) o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta .



2) na função $f(x) = mx + b$, se b = 0 , f é dita função linear e se b≠0 f é dita função afim .

3) o gráfico intercepta o eixo dos x na raiz da equação $f(x) = 0$ e, portanto, no ponto de abscissa x = - b/m .

4) o gráfico intercepta o eixo dos y no ponto (0 , b) , onde b é chamado coeficiente linear .

5) o valor m é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta .

6) se $m>0$, então f é crescente .

7) se $m< 0$, então f é decrescente .

8) quando a função é linear, ou seja, $y = f(x) = mx$, o gráfico é uma reta que sempre passa na origem.

Exemplo 1.4: Esboce o gráfico de $y=3x+1$

Exemplo 1.5: Na função $y=mx+b$ sabe-se que $f(1)=0$ e $f(3)=4$. Determine a função.

O exemplo 1.5 pode ser resolvido usando o conceito de coeficiente angular e equação da reta para obter a expressão de y.

*** Coeficiente Angular – Equações de Retas**

As linhas retas num plano têm equações muito simples, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas. Estas equações podem ser deduzidas utilizando-se o conceito de **coeficiente angular**.

Definição 1.3: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos distintos de uma reta r. Se $x_1 \neq x_2$ então o **coeficiente angular** (ou inclinação) m de r é dado por

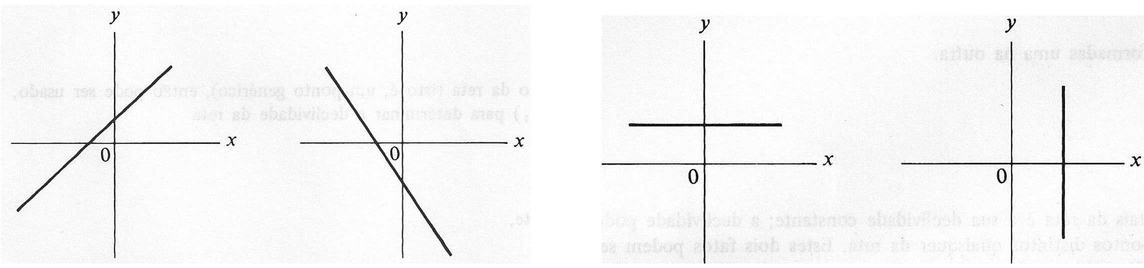
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observações:

1– O valor de m calculado pela definição anterior é independente da escolha dos dois pontos em r.

2 – Se $x_1 = x_2$ então r é uma **reta vertical** e seu coeficiente angular não está definido.

Para entender o significado do coeficiente angular, vamos pensar que estamos caminhando da esquerda para a direita ao longo da reta. Em retas com coeficiente angular positivo estaremos caminhando para cima. Em retas com coeficiente angular negativo estaremos caminhando para baixo. Caminhar em retas com coeficiente angular zero, corresponde a caminhar na horizontal. Se $x_1 = x_2$ então r é uma reta vertical e seu coeficiente angular não está definido.



Coeficiente angular positivo   Coeficiente angular negativo   Coeficiente angular zero   Coeficiente angular indefinido

Exemplo 1.6: Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (–2, 5) e (3, –1).

Exemplo 1.7: Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (7, 1) e (3, 1).

Seja (x_1, y_1) um ponto dado de uma reta de coeficiente angular m.

Então, para qualquer outro ponto (x,y) da reta temos que $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Daí, multiplicando ambos os membros por $(x - x_1)$ obtemos a equação da reta na forma chamada **ponto-coeficiente angular**.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

Se o ponto conhecido é aquele em que a reta corta o eixo y, e é denotado por (0, b), então a equação (1) torna-se

$$y = mx + b \qquad (2)$$

Neste caso, b chama-se **interseção y da reta** ou **coeficiente linear** e a equação (2) chama-se **equação reduzida da reta**. Esta equação expressa a forma geral de uma função do 1º grau.

Como uma reta horizontal tem coeficiente angular zero, a reta horizontal que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem a equação $y = y_1$.

O coeficiente angular de uma reta vertical não está definido, por isso as fórmulas (1) e (2) não são apropriadas para se obter sua equação. No entanto, as primeiras coordenadas de todos os pontos de uma reta vertical são iguais. Assim, uma reta vertical que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem equação $x = x_1$.

Exemplo 1.8: Escreva a equação da reta que:

a) passa pelos pontos (4, – 2) e (5, 8).

b) passa por (2, – 3) e tem coeficiente angular – 4.

c) tem coeficiente angular 2 e coeficiente linear – 5.

d) passa pelos pontos (3, 5) e (3, –1)

Teorema 1.1: Duas retas não-verticais são **paralelas** se e somente se seus coeficientes angulares são iguais.

$$r \,//\, s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

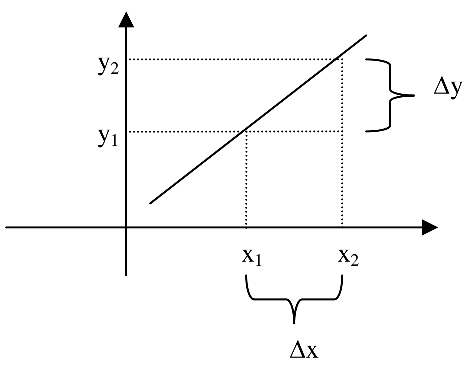
Exemplo 1.9: Seja r a reta que passa pelos pontos (– 2,9) e (1,3) e seja s a reta que passa pelos pontos (– 4, 10) e (3, – 4). Mostre que r e s são paralelas.

Teorema 1.2: Duas retas não-verticais são **perpendiculares** se e somente se o coeficiente angular de uma é igual ao simétrico do inverso do coeficiente angular da outra.

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$$

Exemplo 1.10: Seja r a reta que passa pelos pontos (2,9) e (–1,3) e seja s a reta que passa pelos pontos (4, – 5) e (– 2, – 2). Mostre que r e s são perpendiculares.

Observação: O coeficiente angular de uma reta é uma constante sempre que ele está definido. O número $y_2 - y_1$ é a variação na coordenada y (podemos representar por Δy) e $x_2 - x_1$ é a variação na coordenada x (podemos representar por Δx). Dessa forma, o coeficiente angular de uma reta fornece a razão entre a variação de y e a variação de x, ou ainda, a **taxa de variação** de y em relação à x.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo 1.11:

No começo do ano de 2010, o preço dos pães integrais em um supermercado local aumentou a uma taxa constante de 2 centavos por mês. Em 1º de novembro do referido ano, o preço atingiu R$1,06 por unidade. Expresse o preço do pão em função do tempo e determine o preço no começo de 2010.

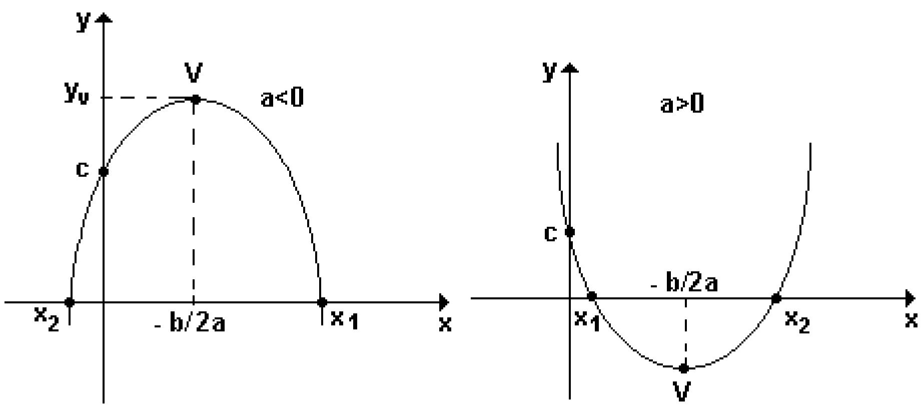
*** Polinômio de grau 2 (Função do 2º grau)**

Uma função é dita do 2º grau quando é do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ , com } a>0 \text{ .}$$

Exemplos 1.12: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ($a = 1$, $b = -2$, $c = 1$) ;$y = - x^2$ ($a = -1$, $b = 0$, $c = 0$)

Gráfico da função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ **: é sempre uma parábola de eixo vertical .**



Propriedades do gráfico de $y = ax^2 + bx + c$:

1) se $a >0$ a parábola tem um ponto de mínimo .

2) se $a <0$ a parábola tem um ponto de máximo

3) o vértice da parábola é o ponto $V(x_v , y_v)$ onde:

$x_v = - b/2a$

$y_v = - \Delta /4a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

4) a parábola intercepta o eixo dos x nos pontos de abcissas x' e x'' , que são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

5) a parábola intercepta o eixo dos y no ponto (0 , c) .

6) o eixo de simetria da parábola é uma reta vertical de equação $x = - b/2a$.

7) $y_{max} = - \Delta / 4a$ ($a <0$)

8) $y_{min} = - \Delta /4a$ ($a > 0$)

9) Im(f) = { $y \in \mathbb{R}$; $y \geq -\Delta/4a$ } (a > 0)

10) Im(f) = { $y \in \mathbb{R}$; $y \leq -\Delta/4a$ } (a< 0)

11) Forma fatorada : sendo x_1 e x_2 as raízes da de $f(x) = ax^2 + bx + c$, então ela pode ser escrita na forma fatorada a seguir :

$$y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

***Função Exponencial e Função Logarítmica**

*** Função Exponencial**

Definição 1.4: Seja $b \in IR_+^* - \{1\}$. A função de IR em IR_+^* tal que $f(x) = b^x$ é chamada de **função exponencial** de base b.

Exemplos 1.13:

1) Seja $f(x) = 2^x$.

Temos que $f(3) = 2^3 = 8$; $f(0) = 2^0 = 1$; $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

2) Seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Temos que $f(4) = \frac{1}{16}$; $f(-3) = 8$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Observação: Na definição anterior, $b \in IR_+^* - \{1\}$ pois:

a) Seja $f(x) = (-2)^x$. Então, por exemplo, $f(1/2) = (-2)^{½} = \sqrt{-2} \notin IR$

b) Seja $f(x) = 0^x$. Então, por exemplo, $f(-2) = 0^{-2} = \frac{1}{0} \notin IR$

c) Seja $f(x) = 1^x$. Então f(x) = 1 para todo número real, isto é, f(x) é uma função constante.

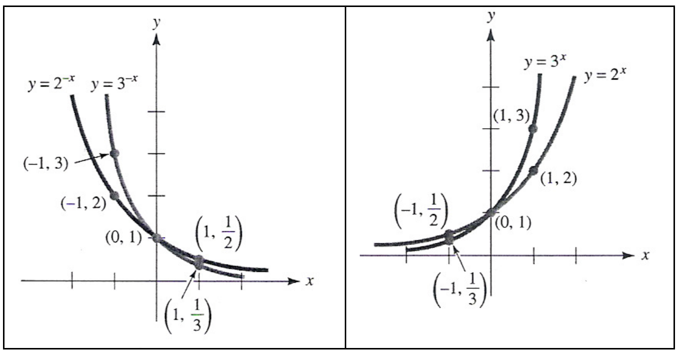
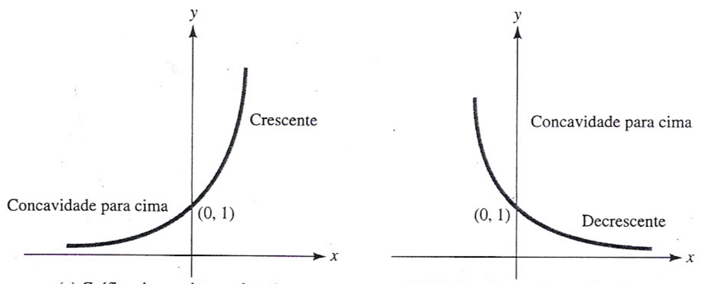


Figura 1

As quatro curvas da figura 1 são típicas dos gráficos de funções exponenciais. Em particular, se b > 1, o gráfico de $y = b^x$ se parece com os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$; se 0 < b < 1, o gráfico de $y = b^x$ se parece com os gráficos de $y = (1/2)^x = 2^{-x}$ e $y = (1/3)^x = 3^{-x}$.

De modo geral, o gráfico de $y = b^x$ é representado por uma curva que está toda acima do eixo x, corta o eixo y no ponto (0,1) e tem concavidade voltada para cima em IR. Além disso, $y = b^x$ é crescente em IR para b > 1 e é decrescente em IR para 0 < b < 1.



As funções exponenciais são contínuas em IR e obedecem às seguintes propriedades:

Sejam a, b $\in \mathrm{IR}_+^* - \{1\}$ e x e y números reais.

a) $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

b) $b^x . b^y = b^{x+y}$

c) $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

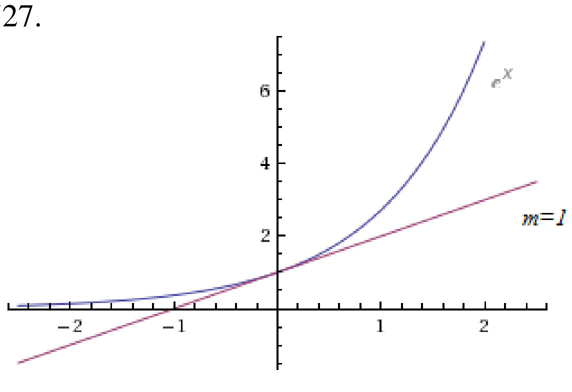
d) $(b^x)^y = b^{xy}$

e) $(a.b)^x = a^x . b^x$

f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

O número *e*

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que aparece com muita freqüência em livros textos de cursos de cálculo. O número *"e"* aparece quando escolhemos para a base *a* um valor tal que a reta tangente a $y=a^x$ no ponto (0,1) tem inclinação exatamente 1. O número *"e"* é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma de fração e seu valor é 2,718281... e também é transcedental (não pode ser resultado de uma equação polinomial com coeficientes inteiros do tipo: $ax^n + bx^{n-1} + ... + z = 0$) . Esta notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonard Euler em 1727.



A função $f(x)$=e^x cruza o eixo y com inclinação 1

A função $f(x)=e^x$ aprece na modelagem de vários fenômenos naturais por exemplo: crescimento populacional, desintegração radioativa. Na área de Economia é aplicada no cálculo de juros. Por exemplo:

Imagine que um banco pague juros de 100% ao ano. Uma situação hipotética, mesmo assim, vamos fazer de conta que existe um banco com essa maravilhosa generosidade. Após um ano, teríamos o montante de R$ 2,00 para cada R$ 1,00 aplicado. E se, com uma generosidade inexplicável, os juros fossem creditados semestralmente, ao final de um ano teríamos R$ 2,25. A expressão para esse cálculo é a seguinte:

$(1 + 1/n)^n = (1 + 1/2)^2 = 2,25$ (a fórmula dos Juros Compostos é: $M=C(1+i)^t$, onde M=montante, C=capital, i=taxa de juros, t=tempo)

Para o crédito ser trimestral, temos n = 4 e o resultado é 2,44141. Vejamos alguns resultados para diversos valores de n na tabela abaixo.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

A “loucura total” seria calcular quanto seria o resultado para o crédito instantâneo, ou seja, com n tendendo ao infinito. Esse limite é chamado número *e* (número de Euler).

***Função Logarítmica**

Para definir a função logarítmica, vamos primeiro fazer uma revisão de logaritmo.

Definição 1.5: Sejam a, b$\in \mathbb{R}_+^*$ com b $\neq$ 1. Dizemos que o **logaritmo** de a na base b é o número x tal que $b^x = a$, isto é:

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

Exemplos 1.14:

1) $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

2) $\log_3 81 = 4$ pois $3^4 = 81$

3) $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$ porque $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

Observações:

1) Os logaritmos de base 10 são chamados de **logaritmos decimais** e denotados sem indicar o valor da base, isto é, $\log a = \log_{10} a$.

2) Os logaritmos de base *e* são chamados de **logaritmos neperianos** (ou naturais) e denotados por ln isto é, $\ln a = \log_e a$.

Propriedades dos logaritmos:

Sejam $b \in IR_+^* - \{1\}$ e sejam $a, c \in IR_+^*$

1) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b 1 = 0$

4) $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

5) $\log_b a^c = c.\log_b a$

6) $\log_b \left(\dfrac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

Definição 1.6: Seja $b \in IR_+^* - \{1\}$. A função de IR_+^* em IR tal que $f(x) = \log_b x$ é chamada de **função logarítmica** de base b.

A figura abaixo mostra os gráficos de duas funções logarítmicas:

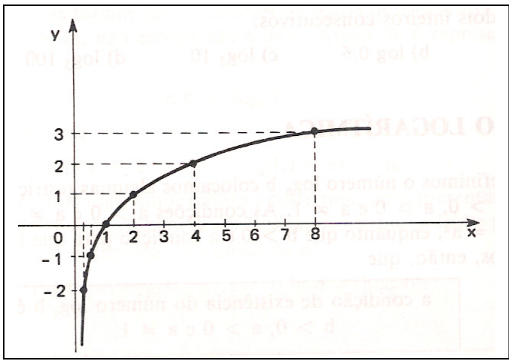


Gráfico de $y = \log_2 x$

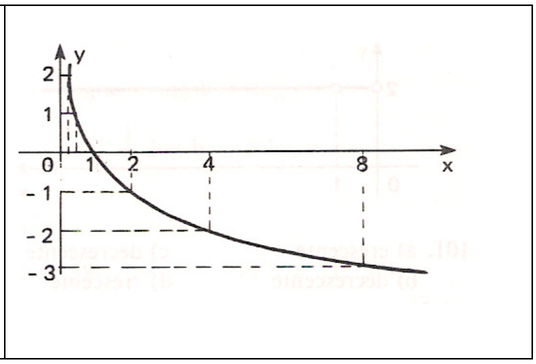


Gráfico de $y = \log_{1/2} x$

Observações:

1) A função logarítmica é uma função contínua em IR_+^*.

2) A função logarítmica é crescente em IR_+^* para $b > 1$ e é decrescente em IR_+^* para $0 < b < 1$

Propriedades que relacionam as funções exponencial e logarítmica como funções inversas:

1) $b^{\log_b x} = x$ 2) $\log_b b^x = x$

*** Funções: Aplicações**

Função Custo, Função Receita e Função Lucro

Uma **função custo** descreve o custo de produção de determinado bem e varia em função da quantidade produzida desse bem. No custo de produção existem duas parcelas: uma parte fixa, chamada **custo fixo**, que não depende da quantidade produzida e corresponde aos gastos fixos de produção tais como aluguel e manutenção do prédio; e uma parte variável que depende da quantidade produzida e corresponde aos gastos de produção propriamente dita, isto é, envolve compra de matéria prima, pagamento de mão-de-obra, etc., é o chamado **custo variável**.

A **função custo** é a soma dos custos fixo e variável.

Exemplo 1.15: O custo variável de fabricação de x filtros de água é $10x – 0{,}0001x^2$ com $0 \leq x \leq 40.000$ e o custo fixo mensal é R$ 12.000,00. Determine a função C(x) que fornece o custo total da fábrica e calcule o custo para produzir 10.000 litros de água.

Exemplo 1.16: O custo mensal de produção de x brinquedos é dado por C(x) = 2x + 3.000.
a) Calcule o custo para se produzir 2.000 brinquedos.
b) Determine o custo adicional, se o nível de produção aumentar de 2.000 para 2.200 brinquedos.
c) Quantos brinquedos podem ser produzidos a um custo de R$5.000,00?

A **função receita** descreve o total bruto recebido pela venda de uma quantidade variável de um produto. A função receita R(x) pode ser determinada multiplicando-se o preço unitário p do produto pela quantidade x, isto é, R(x) = p.x

A **função lucro** (total) é expressa pela diferença entre as funções receita e custo.

Exemplo 1.17: Suponha que x brinquedos do exemplo anterior são vendidos por R$10,00 a unidade. Então R(x) = 10x. Dada a mesma função custo, C(x) = 2x + 3.000, o lucro gerado pelos x brinquedos será:

$$L(x) = R(x) – C(x) = 10x – (2x + 3.000)$$
$$L(x) = 8x – 3.000$$

a) Determine a receita gerada por 8.000 brinquedos.
b) Determine o lucro gerado por 8.000 brinquedos.

Exemplo 1.18: O custo semanal de fabricação de x unidades de um produto é dado por C(x) = 9x + 800 e a receita gerada pela venda de x unidades é R(x) = 21x.
a) Determine a função lucro L(x).
b) Qual é o lucro obtido quando são vendidas 120 unidades por semana?
c) Se o lucro é de R$1.000,00 por semana, qual é a receita semanal?

Exemplo 1.19: C(x) = 2x + 17 e $R(x) = 20x – x^2$ são, respectivamente, as funções custo e receita para x unidades de um produto fabricado e vendido por uma empresa.
a) Determine a função lucro L(x) da empresa.
b) Determine o valor de x para que o lucro seja máximo.

Referências:

-Cardoso, Maria Emília Neves. Notas de aula de Complementos de Matemática Aplicada, UFF: 2011.
-Hoffmann, L;Bradley,G. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. 6ª ed. LTC, 1999.
-Stewart, James. Cálculo Volume 1. 5ª Ed.. São Paulo: Thomson Learnig, 2008.
- http://www.testonline.com.br/numeroe.htm