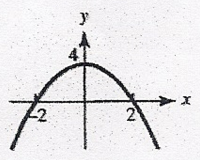
2.5 – Áreas de regiões planas

Usando a notação de integral definida, a definição da área da região sob o gráfico de uma função [1] pode ser expressa da seguinte maneira:

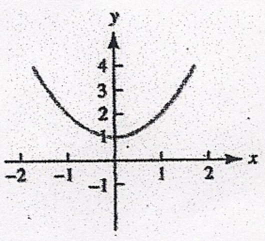
Definição 1: Seja f uma função contínua em [a, b] e tal que $f(x) \geq 0$ em [a, b]. A área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$

Exemplos:

1 – Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ e $x = 2$



2 – Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$ e $x = 2$



Em 2.4 assumimos que $f(x) \geq 0$ em [a, b], isto é, que o gráfico de f(x) entre x = a e x = b estava acima do eixo x. Se a região entre x = a e x = b limitada pelo gráfico de f e o eixo x permanece inteiramente abaixo do eixo x, então cada valor de f(x) é negativo. Assim, cada f(x)dx é negativo e a área dessa região é o oposto da integral definida de a até b de f(x).

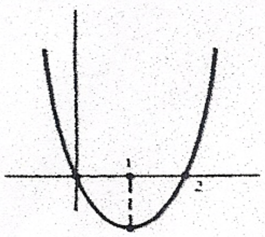
Definição 2: Seja f uma função contínua em [a, b] e tal que $f(x) \leq 0$ em [a, b]. A área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = -\int_a^b f(x)dx$

Exemplos:

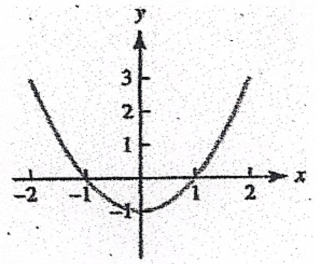
3 – Determine a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ entre x = 1 e x = 2

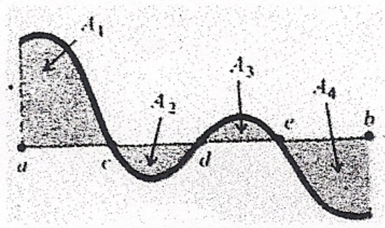
---

(1) Chamamos de **região sob o gráfico de uma função** (ou região limitada pelo gráfico de uma função) f entre x = a e x = b à região entre o gráfico de f e o eixo x entre x = a e x = b.



4 – Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ entre $x = -1$ e $x = 1$

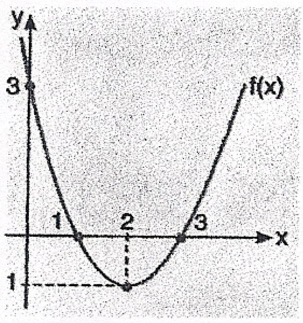




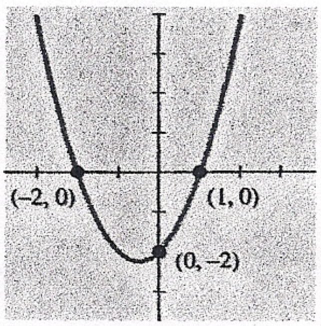
Se a curva está parcialmente acima do eixo x e parcialmente abaixo como é mostrado na figura ao lado, então a área pode ser considerada como uma soma de termos positivos e negativos, correspondentes a partes da região que estão acima e abaixo do eixo x.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx - \int_e^b f(x)dx$$

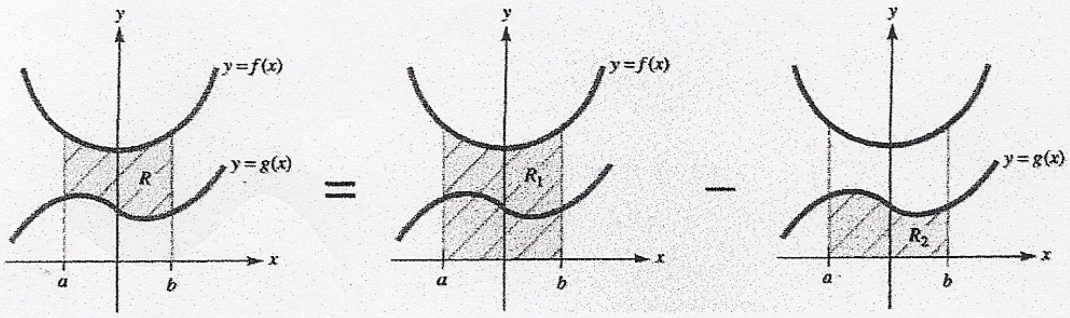
5 – Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ entre $x = 0$ e $x = 3$



6 – Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 + x - 2$ entre $x = -2$ e $x = 2$



Para determinar a área da região R entre os gráficos de f e g de x = a até x = b (figura abaixo), basta subtrair a área da região sob o gráfico de g da área da região sob o gráfico de f.



Assim, área de R = área de R_1 – área de R_2

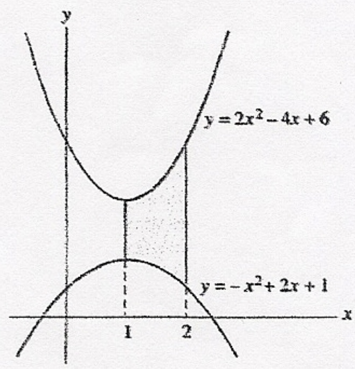
Ou seja, área de R = $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Podemos provar que essa expressão é válida mesmo que as funções não sejam não-negativas.

Definição 3: Se f e g são funções contínuas em [a, b] tais que $f(x) \geq g(x)$ em [a, b] e se R é a região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas x = a e x = b, então

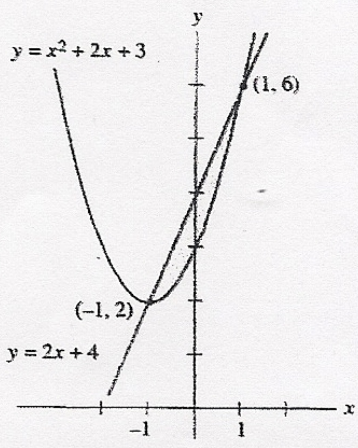
$$\text{Área de R} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Exemplo 7: Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ entre x = 1 e x = 2



Algumas vezes temos de considerar o problema de encontrar a área entre duas curvas sem que os valores de a e b sejam determinados. Nestes casos, existe uma região que está completamente envolta pelas duas curvas. Como o próximo exemplo ilustra, temos que encontrar os pontos de interseção entre as duas curvas para obter os valores de a e b.

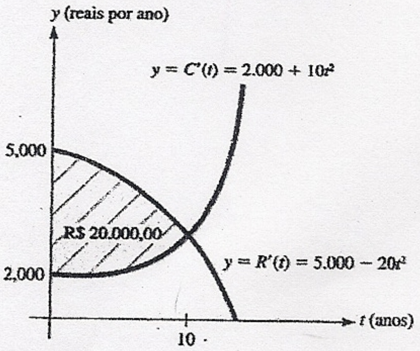
Exemplo 8: Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = x^2 + 2x + 3$.



2.5.1 – Aplicações de Áreas:

— Receita líquida gerada por uma máquina industrial

A Receita líquida gerada por uma máquina industrial durante certo período de tempo é a diferença entre a receita total gerada pela máquina e o custo total de operação e manutenção da máquina. $L(t) = R(t) - C(t)$



Exemplo: Quando tem t anos de uso, certa máquina industrial gera receita a uma taxa de $R'(t) = 5.000 - 20t^2$ reais por ano. A taxa de aumento dos custos de operação e manutenção é dada por $C'(t) = 2.000 + 10t^2$ reais por ano.
a) Após quantos anos a rentabilidade da máquina começa a diminuir? (quando $L'(t) < 0$)
b) Calcule a receita líquida gerada pela máquina durante 10 anos.

$$\underbrace{L(10) - L(0)}_{\text{Receita líquido}} = \int_0^{10} L'(t)\,dt = \int_0^{10} R'(t) - C'(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{área entre} \\ y = C' \text{ e} \\ y = R' \text{ de} \\ 0 \text{ a } 10 \end{array} \right.$$

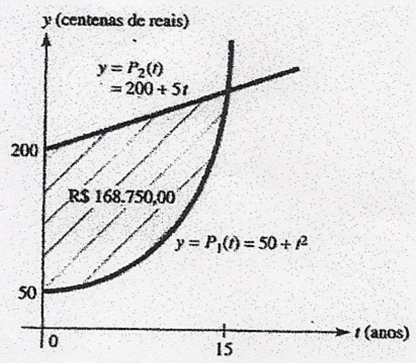
— Lucro líquido excedente

Suponha que daqui a t anos dois planos de investimentos estejam gerando lucros e que os índices de rentabilidade correspondentes sejam $P_1(t)$ e $P_2(t)$ u.m. por ano, e que para os próximos n anos (isto é, $0 \leq t \leq n$), $P_2(t) \geq P_1(t)$. As funções $P_1(t)$ e $P_2(t)$ representam as taxas nas quais os lucros são gerados pelos planos 1 e 2, respectivamente. Dessa forma, $P_2(t) - P_1(t)$ representa a taxa na qual o lucro gerado pelo segundo plano excede o lucro gerado pelo primeiro. O **lucro líquido excedente** (LE) gerado pelo segundo plano durante os próximos n anos é a integral definida desta taxa de variação no período de tempo entre 0 e n, isto é:

$$LE = \int_0^n (P_2(t) - P_1(t))\,dt$$

e pode ser interpretado geometricamente como a área entre as curvas $y = P_1(t)$ e $y = P_2(t)$

Exemplo: Suponha que daqui a t anos um plano de investimentos estará gerando lucro a uma taxa de $P_1(t) = 50 + t^2$ centenas de reais por ano enquanto um segundo plano estará gerando lucro a uma taxa de $P_2(t) = 200 + 5t$ centenas de reais por ano. (a) Por quantos anos o segundo plano será mais lucrativo que o primeiro? (b) Determine o lucro líquido excedente para um investimento no segundo plano por um período igual ao calculado no item (a).

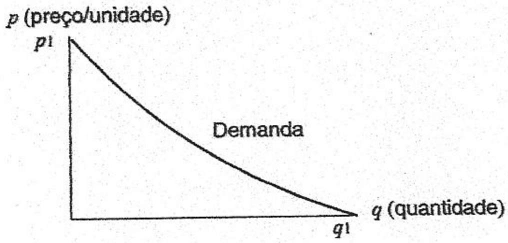


— Excedente do Consumidor e Excedente do Produtor

A **demanda** de uma mercadoria é dada pela quantidade que os consumidores desejam adquirir num certo período de tempo. A demanda depende de uma série de fatores, dos quais podemos citar: o preço da mercadoria, a renda do consumidor, o preço de outras mercadorias que têm alguma relação com ela, os hábitos e os gostos do consumidor e o efeito que a propaganda provoca no mercado consumidor. A demanda de uma mercadoria é, portanto, a resultante da ação conjunta ou combinada de todas essas variáveis.

Quando queremos saber, por exemplo, o que ocorre com a demanda de uma mercadoria se o preço da mesma aumentar, devemos supor que todas as demais variáveis que influenciam a demanda permanecem inalteradas, de modo que a variação da demanda dependa exclusivamente da variação do preço.

Uma função que relaciona o preço unitário e a quantidade demandada de uma mercadoria é chamada de **função de demanda.**

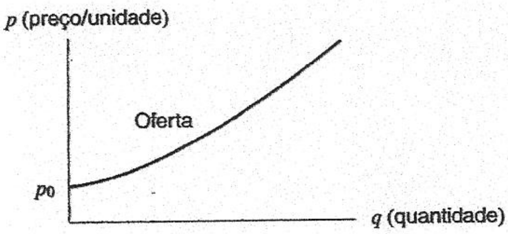


O gráfico da função de demanda é chamado **curva de demanda.** Quando se traça um esboço de uma curva de demanda é costume usar o eixo vertical para representar o preço e o eixo horizontal para representar a quantidade (figura ao lado).

Como seria de se esperar, a função de demanda é decrescente (à medida que o preço aumenta, a quantidade procurada diminui; quando o preço diminui, a quantidade procurada aumenta).

A **oferta** também pode ser expressa por uma função que relaciona o preço e a quantidade ofertada de uma mercadoria, descrevendo o comportamento do produtor. Como no caso da demanda, quando se considera apenas o preço como determinante da quantidade que é ofertada de uma mercadoria, estamos supondo que os demais fatores permanecem constantes.

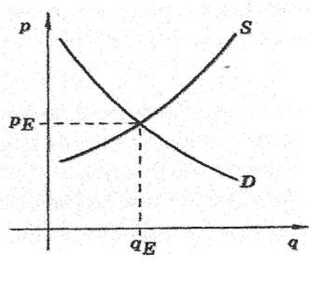
Uma função que relaciona o preço unitário e a quantidade ofertada de uma mercadoria é chamada de **função de oferta**.



O gráfico da função de oferta é chamado de **curva de oferta** e a figura ao lado mostra um esboço dela quando as circunstâncias são normais.

A função de oferta é crescente, pois à medida que o preço aumenta, a quantidade ofertada também aumenta; quando o preço diminui, a quantidade ofertada diminui.

O chamado **equilíbrio de mercado** prevalece quando a quantidade demandada é igual à quantidade produzida. A quantidade produzida (ou demandada) num equilíbrio de mercado é chamada de **quantidade de equilíbrio** e o preço correspondente é chamado de **preço de equilíbrio.** O equilíbrio de mercado corresponde ao ponto no qual a curva de demanda e a curva de oferta se interceptam. Na figura ao lado temos um esboço de uma curva de demanda (D) e uma curva de oferta (S) e (q_E, p_E) é o **ponto de equilíbrio.**



Exemplo 1: As funções de demanda e de oferta para um determinado bem são dadas, respectivamente, por $p = -\frac{q}{2} + 50$ e $p = \frac{q+50}{3}$. Ache o preço e a quantidade de equilíbrio.

A função de demanda p = D(q) também pode ser encarada como a taxa de variação da quantia total A(q) que os consumidores estão dispostos a gastar para comprar q unidades (quantia total paga ao preço máximo) em relação à q, isto é,

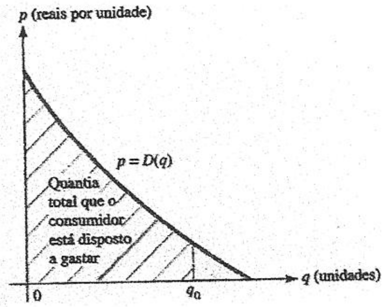
$$D(q) = \frac{dA}{dq}$$

Integrando ambos os membros dessa equação obtemos:

$$\int_0^{q_0} D(q)\,dq = \int_0^{q_0} \frac{dA}{dq}\,dq = A(q_0) - A(0) = A(q_0)$$

Logo, a **quantia total que os consumidores estão dispostos a gastar para adquirir q_0 unidades de um produto** é dada por:

$$A(q_0) = \int_0^{q_0} D(q)\,dq$$



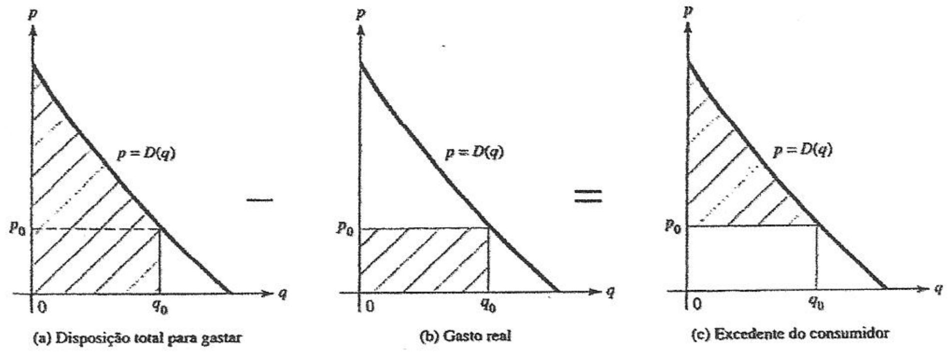
Em termos geométricos, $A(q_0)$ é a área sob a curva de demanda entre $q = 0$ e $q = q_0$.

Exemplo 2: A função de demanda de um produto é $p = 4(25 - q^2)$ reais por unidade. Determine a quantia total que os consumidores estão dispostos a gastar para adquirir três unidades do produto.

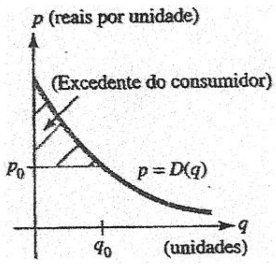
Uma vez conhecido o preço p_0 de um produto, o número de unidades adquiridas pelos consumidores é dado pela função de demanda. A quantia gasta pelos consumidores para adquirir q_0 unidades do produto ao preço p_0 é, portanto, p_0q_0.

Em uma economia competitiva, a quantia total que os consumidores gastam com um produto geralmente é menor do que a que estariam dispostos a gastar. A diferença entre as duas quantias pode ser considerada uma poupança do consumidor e é conhecida como **excedente do consumidor (EC).**

$$\begin{bmatrix}\text{quantia total que o consumidor}\\ \text{está disposto a gastar para}\\ \text{adquirir } q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{quantia gasta pelo consumidor}\\ \text{para adquirir } q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix} = [\text{Excedente do consumidor}]$$



(a) Disposição total para gastar — (b) Gasto real = (c) Excedente do consumidor



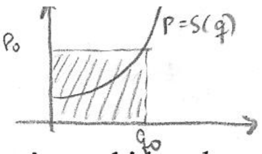
Logo, se q_0 unidades de um produto são vendidas por um preço unitário p_0 e $p = D(q)$ é a função de demanda do produto, então, o **excedente do consumidor** é dado por: $EC = \int_0^{q_0} D(q)\,dq - p_0 q_0$

Exemplo 3: Se $p = -0{,}3q^2 + 90$ é a função de demanda para um produto, e seu preço unitário de mercado é 60 reais, determine o excedente do consumidor.

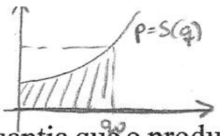
Exemplo 4: Encontre o excedente do consumidor para a função de demanda $p = 50 - 0{,}06q^2$ em um nível de vendas de 20 unidades.

O **excedente do produtor** é o equivalente para o produtor do excedente do consumidor.

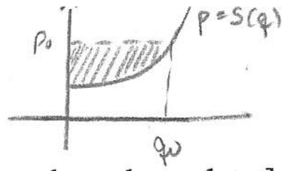
A função de oferta $p = S(q)$ representa o preço unitário que os produtores estão dispostos a aceitar para fornecer q_0 unidades de um produto. Os produtores que estavam dispostos a aceitar um preço unitário menor que $p_0 = S(q_0)$ pelo produto se beneficiam do fato de que o preço é p_0. O **excedente do produtor** é a diferença entre a quantia recebida pelo produtor e a quantia que ele estaria disposto a aceitar.



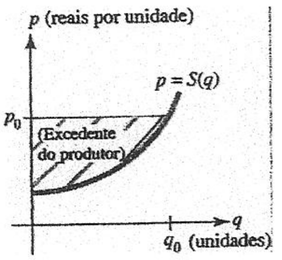
−



=



$\left[\begin{array}{c}\text{quantia recebida pelo produtor}\\ \text{para fornecer } q_0 \text{ unidades}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{quantia que o produtor}\\ \text{está disposto a aceitar para}\\ \text{fornecer } q_0 \text{ unidades}\end{array}\right] = [\text{Excedente do produtor}]$



Se q_0 unidades de um produto são vendidas a um preço p_0 e $p = S(q)$ é a função de oferta, então, o **excedente do produtor** é dado por:

$$EP = p_0q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\,dq$$

Exemplo 5: Se $p = 0{,}3q^2 + 30$ é a função de oferta de um produto, determine o excedente do produtor para o nível de produção $q_0 = 4$.

Exemplo 6: Se a função de oferta de um produto é $p = q^2 + 4q + 4$ e o preço unitário de mercado é $p_0 = 25$, determine o excedente do produtor.