Curvas em coordenadas polares

As coordenadas polares nos dão uma maneira alternativa de localizar pontos no plano e são especialmente adequadas para expressar certas situações, como veremos a seguir.

Vamos começar com um exemplo que servirá como motivação.

Exemplo 1. A curva parametrizada pela equação

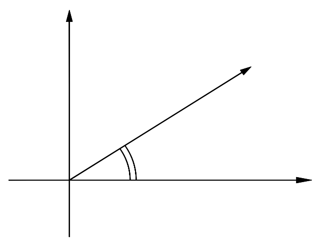
$$\alpha(t) \;=\; t\,(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), \quad t \geq 0$$

é um exemplo de uma espiral. Ela é chamada de espiral de Arquimedes.

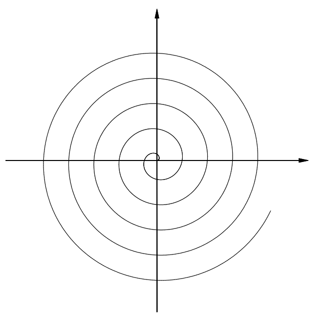
A distância de $\alpha(t)$ até a origem é

$$|\alpha(t)| \;=\; \sqrt{t^2\,\cos^2 2\pi t + t^2 \operatorname{sen}^2 2\pi t} \;=\; t.$$

Ou seja, na medida em que t aumenta, o ponto $\alpha(t)$ afasta-se da origem. Em contrapartida, ao marcarmos o ponto $\alpha(t) = (t\,\cos 2\pi t, t \operatorname{sen} 2\pi t)$ no plano, percebemos que, para $t > 0$, $2\pi t$ é o ângulo que $\alpha(t)$, visto como um vetor, faz com a parte positiva do eixo Ox.

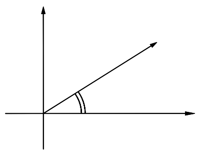


Assim podemos compreender a dinâmica da curva: o vetor $\alpha(t)$ gira em torno da origem, com sentido anti-horário, dando uma volta em torno dela sempre que t varia sobre um intervalo de comprimento 1, enquanto o mesmo alonga-se, fazendo sua outra extremidade afastar-se da origem. O traço obtido é o seguinte:



Coordenadas Polares

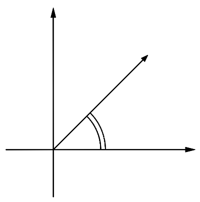
Como você pode ver no exemplo anterior, para determinar um ponto no plano, é necessário ter duas informações. No caso das coordenadas cartesianas, essas informações são as distâncias 'orientadas' do ponto até os eixos coordenados Ox e Oy. No caso das coordenadas polares, essas duas informações serão uma distância e um ângulo. A primeira, usualmente representada por r, é a distância entre o ponto e origem, que será o pólo do sistema, daí o nome *coordenadas polares*. Quando a distância r é não nula, o segmento que une a origem ao ponto, ou o ponto visto como um vetor, faz um certo ângulo com o semi-eixo positivo Ox. Este ângulo, usualmente denotado por θ, é a segunda informação.

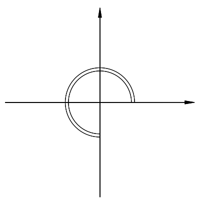


Vamos usar a seguinte convenção para representar as coordenadas polares:

$$(r, \theta)_{\text{polar}}$$

Exemplo 2. As coordenadas cartesianas do ponto $(2\sqrt{2}, \pi/4)_{\text{polar}}$ são $(2, 2)$ e, as coordenadas polares do ponto $(0, -2)$ são $(2, 3\pi/2)_{\text{polar}}$.





Para marcar o ângulo, iniciamos no semi-eixo Ox positivo e giramos no sentido *anti-horário* até esgotar o ângulo dado.

Usando essa convenção, podemos marcar também ângulos maiores do que 2π assim como ângulos 'negativos', da mesma forma como lidamos com os argumentos das funções trigonométricas. Lembre-se de que estamos interpretando esses ângulos como coordenadas. Muito bem, para os ângulos maiores do que 2π, seguimos medindo, dando tantas voltas quantas necessárias, até esgotar o valor dado. Por exemplo, $(2,\ \pi/4)_{\text{polar}} = (2,\ 9\pi/4)_{\text{polar}} = (2,\ 17\pi/4)_{\text{polar}}$. Para marcar os ângulos negativos, fazemos a mesma coisa porém girando no sentido horário. Dessa forma, $(2,\ -\pi/4)_{\text{polar}} = (2,\ 7\pi/4)_{\text{polar}}$.

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares é dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos usar as coordenadas polares para expressar curvas, assim como o fazemos com as coordenadas cartesianas. Geralmente, expressamos r em função de θ. Você verá que certas curvas são mais facilmente expressas em termos de coordenadas polares.

Exemplo 3. As equações $x^2+y^2 = 4$ e $x = 3$ representam, em coordenadas cartesianas, a circunferência do círculo de raio 2, com centro na origem, e a reta paralela ao eixo Oy e que contém o ponto $(3, 0)$.

Em coordenadas polares, a equação da circunferência é, simplesmente,

$$r = 2.$$

Ou seja, $r = 2$ determina o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância até a origem é 2.

No entanto, a equação cartesiana $x = 3$ ganha a seguinte forma polar

$$r\cos\theta = 3.$$

Para expressarmos r em função de θ, temos de nos preocupar com a variação de θ. Assim, se $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, podemos colocar

$$r = 3\sec\theta.$$

Note que, na medida em que $\theta \to \pi/2^+$, a distância r do ponto até a origem cresce para o infinito, pois

$$\lim_{\theta\to\pi/2^+} \sec\theta = +\infty.$$

Exercício 1 Encontre a equação polar da reta $y = -2$.

Exemplo 4. Vamos encontrar a equação polar da circunferência determinada por

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Para isso, reescrevemos essa equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2x. \end{aligned}$$

Agora usamos as equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$ para obter

$$r^2 = 2r\cos\theta.$$

Assim, a equação polar fica

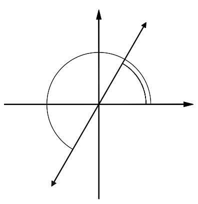
$$r = 2\cos\theta.$$

Um pouco de cuidado, agora, com a variação de θ. Para percorrer toda a circunferência, uma vez, basta fazer $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$. Veja que devemos incluir o ângulo $\pi/2$ para obter $r = 0$.

Note que a origem não tem a coordenada θ bem definida. Além disso, estamos sempre considerando r um número positivo. No entanto, quando lidamos com equações tais como a do exemplo anterior, $r = 2\cos\theta$, percebemos a conveniência de estabelecer a seguinte convenção:

$$(-r,\ \theta)_{\text{polar}} = (r,\ \theta + \pi)_{\text{polar}}.$$

Assim, o ponto de coordenadas cartesianas $(1, \sqrt{3})$ pode ser representado em coordenadas polares como:



$$(2,\ \pi/3)_{\text{polar}} = (2,\ -5\pi/3)_{\text{polar}} = (-2,\ 4\pi/3)_{\text{polar}} = (-2,\ -2\pi/3)_{\text{polar}}.$$

A equação $r = 2\cos\theta$, então, também faz sentido quando $\cos\theta$ assume valores negativos. Veja que, se $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2)$, a equação representa a mesma circunferência: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Exercício 2 Determine a equação polar da circunferência determinada por

$$x^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Exemplo 1. (Revisitado) Vamos encontrar uma equação polar para a curva determinada pela parametrização

$$\alpha(t) = (t\cos 2\pi t, t\,\mathrm{sen}\, 2\pi t).$$

Essa equação paramétrica é dada em termos de coordenadas cartesianas. Isto é, $x(t) = t\,\cos 2\pi t$ e $y(t) = t\,\mathrm{sen}\,2\pi t$.

Primeiro, vamos considerar uma equação paramétrica dada em termos das coordenadas polares:

$$\begin{cases} r &= t \\ \theta &= 2\pi t. \end{cases}$$

Assim, a equação da curva, em termos de coordenadas polares, pode ser obtida das equações anteriores, eliminando o parâmetro t:

$$r \;=\; \frac{\theta}{2\pi}, \qquad \theta \geq 0.$$

Exercício 3 Faça um esboço das seguintes curvas, dadas por equações escritas em termos de coordenadas polares:

(a) $\theta \;=\; \dfrac{\pi}{3}, \qquad r \geq 0;$

(b) $r = \dfrac{\theta}{\pi}, \qquad \theta \leq 0;$

(c) $r = 3\,\csc\,\theta, \qquad \pi/4 < \theta < 3\pi/4;$

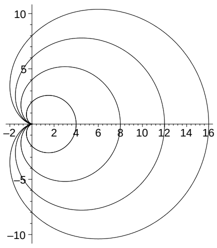
(d) $\begin{cases} r &= \sqrt{t} \\ \theta &= t. \end{cases}$

Há várias técnicas que permitem esboçar curvas dadas em termos de coordenadas polares. Tais técnicas levam em conta simetrias e outras características geométricas que podem ser detectadas nas equações. O estudo de tais técnicas, porém, foge ao escopo deste curso, no qual queremos apresentar uma introdução a esse tema. A seguir, apresentaremos uma série de curvas com suas equações e nomes, para que você tenha uma idéia das possibilidades.

Exemplo 5. As curvas dadas por equações do tipo

$$r \;=\; 2\,a\,(1 + \cos\,\theta)$$

são chamadas de *cardióides*. Na figura a seguir, estão representadas quatro cardióides, onde os valores de a são 1, 2, 3 e 4.



Observe que as curvas são simétricas em relação ao eixo Ox. Isso pode ser percebido nas equações da seguinte forma:

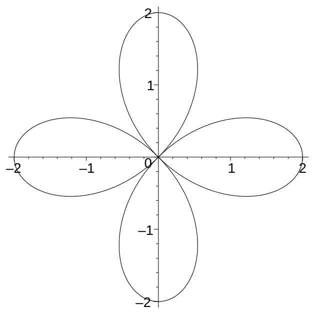
$$r(\theta) \;=\; 2\,a\,(1+\cos\,\theta) \;=\; r(-\theta),$$

pois $\cos\,\theta \;=\; \cos\,(-\theta)$.

Exemplo 6. A equação

$$r \;=\; 2\,\cos\,2\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

determina uma curva chamada *rosácea de quatro folhas*. Veja que seu gráfico apresenta simetrias em relação aos dois eixos cartesianos.



Exemplo 7. As curvas correspondentes a equações da forma

$$r \;=\; a \pm b\,\cos\,\theta$$

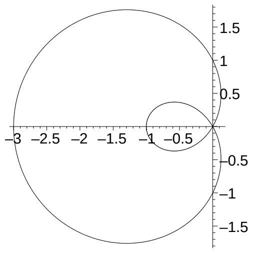
ou

$$r \;=\; a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

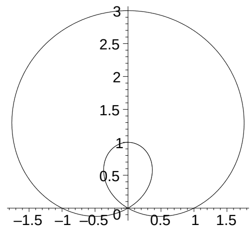
são conhecidas como *limaçons*. As cardióides, apresentadas no exemplo 17.5, são casos particulares de limaçons, quando $a = b$. Há dois tipos principais de curvas, dependendo de quem é maior, $|a|$ ou $|b|$.

A palavra *limaçon* quer dizer, em francês, caracol.

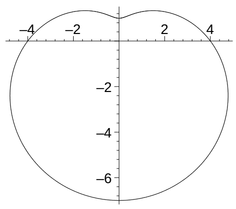
Aqui estão quatro exemplos, com suas respectivas equações.



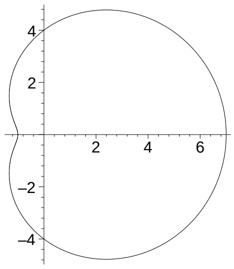
$$r = 1 - 2\cos\theta$$



$$r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$$



$$r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$$



$$r = 4 + 3\cos\theta$$

Exercícios

Exercício 1 Encontre a equação polar da reta $y = -2$.

Solução:

Devemos usar a fórmula que relaciona y com as variáveis de coordenadas polares:

$$y = r\operatorname{sen}\theta.$$

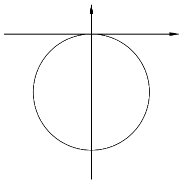
Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} r\operatorname{sen}\theta &= -2 \\ r &= \frac{-2}{\operatorname{sen}\theta} \\ r &= -2\csc\theta. \end{aligned}$$

Para terminar, devemos apresentar a variação de θ. Não queremos que $\operatorname{sen}\theta$ seja igual a zero. Para cobrirmos toda a reta $y = -2$, devemos fazer $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Exercício 2 Determine a equação polar da circunferência determinada por

$$x^2 + (y+2)^2 = 4.$$



$x^2 + (y+2)^2 = 4$

$r = -4 \operatorname{sen} \theta$

Solução:

Vamos começar reescrevendo a equação dada de maneira diferente.

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 + 4y + 4 &= 4 \\ x^2 + y^2 = -4y. \end{aligned}$$

Agora usamos as equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, para obter:

$$\begin{aligned} r^2 &= -4\, r \operatorname{sen} \theta \\ r &= -4 \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Agora que temos a equação, devemos apresentar o domínio de variação de θ.

A circunferência em questão tem centro no ponto $(0, -2)$ e raio 2. Ela, portanto, se encontra na região $y \leq 0$ do plano. Ou seja, abaixo do eixo Ox. A variação de θ será no intervalo $[0, \pi)$. Veja que $r(0) = 0$, representando a origem. Na medida em que θ varia de 0 até π, $\operatorname{sen} \theta$ varia de 0 até 1 e depois de volta até 0, sempre na região positiva. No entanto, a equação $r = -2 \operatorname{sen} \theta$ determina valores negativos para r. Isso está perfeito, pois esses pontos devem ser rebatidos para serem marcados, segundo nossa convenção, e, dessa forma, a circunferência obtida é, precisamente, a que corresponde à equação $x^2 + (y+2)^2 = 4$.

Exercício 3 Faça um esboço das seguintes curvas, dadas por equações escritas em termos de coordenadas polares:

(a) $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \qquad r \geq 0;$

(b) $r = \dfrac{\theta}{\pi}, \qquad \theta \leq 0;$

(c) $r = 3 \csc \theta, \qquad \pi/4 < \theta < 3\pi/4;$

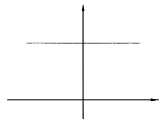
(d) $\begin{cases} r = \sqrt{t} \\ \theta = t. \end{cases}$

Solução:

(a) Aqui temos a afirmação que θ é uma constante e r assume valores positivos. Isso corresponde a um raio partindo da origem, que faz ângulo $\pi/3$ com o eixo Ox.

(b) Essa equação corresponde a uma espiral.

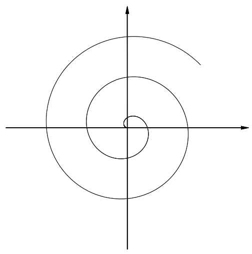
(c) A equação corresponde a uma reta paralela ao eixo Ox. Para fazer o esboço correto devemos estar atento à variação de θ. Aqui está: quando θ varia de $\pi/4$ até $3\pi/4$, percorremos o segmento de reta que liga os pontos $(3,3)$ até o ponto $(-3,3)$.



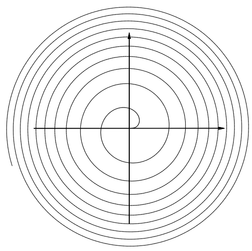
$y = 3$

$r = 3 \csc \theta$

(d) Esta equação paramétrica determina a equação polar $r = \sqrt{\theta}$, que também é uma espiral. Veja que temos que tomar $\theta \geq 0$.



$r = \theta/\pi$



$r = \sqrt{\theta}$

Exercício 4 Encontre uma equação polar para as curvas dadas pelas seguintes equações cartesianas:

(a) $x^2 + y^2 = 2$; (b) $x^2 + (y-4)^2 = 16$;

(c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$; (d) $x = -3$;

(e) $x + y = 1$.

Exercício 5 Faça um esboço das curvas dadas pelas seguintes equações polares:

(a) $r = 2, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$;

(b) $r = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$;

(c) $r = sec\,\theta, \quad \pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$;

(d) $r = \dfrac{3}{\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$;

(e) $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (cardióide);

(f) $r = 3 \operatorname{sen} 3\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (rosácea de três pétalas);

(g) $r = 5 - 4 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (limaçon).