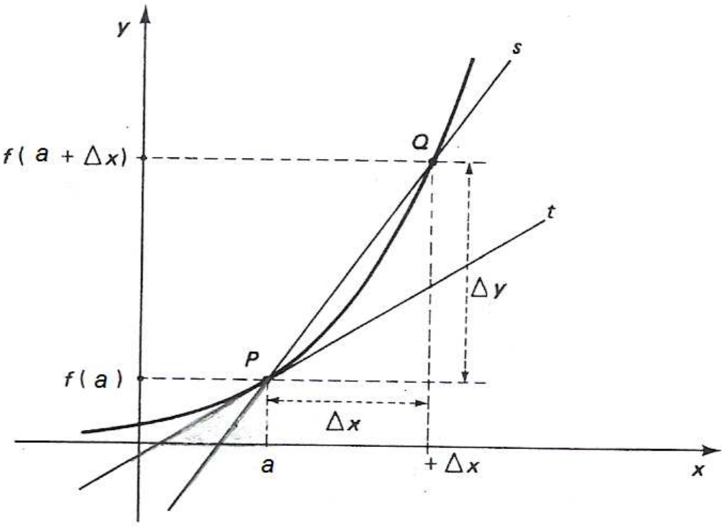
A Derivada de uma Função

Na aula passada vimos como calcular a derivada de uma função f em um número fixo x=a.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



Se fizermos Δx tender a zero, o ponto Q se moverá sobre a curva y = f(x) e tenderá ao ponto P. Além disso, a reta secante s irá girar em torno de P e tenderá para a reta tangente t. Logo, quando Δx tende a zero, o coeficiente angular de s tende para o coeficiente angular de t, ou seja,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Vamos mudar nosso ponto de vista e vamos variar o número “a”. Se substituirmos “a” na expressão acima por x, podemos escrever a seguinte definição:

Definição 2.3: Dada uma função f(x), a função definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ é chamada de (função) **derivada** de f(x)

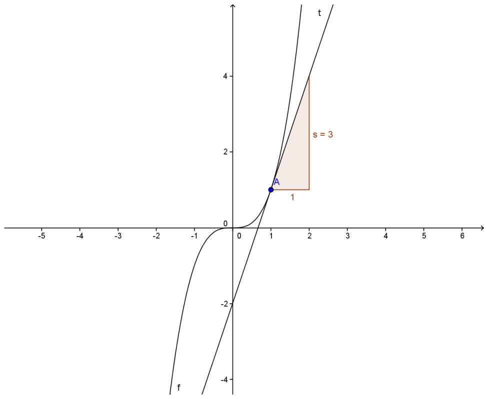
Exemplo 3.6 : a) Determine a derivada de $f(x) = x^2$.
b) Determine a derivada de $f(x) = x^3$.

Observações:

1 – O limite indicado na definição de derivada pode existir para alguns valores de x e deixar de existir para outros. Se o limite existe (é finito) para x = a, dizemos que a função é **derivável** (diferenciável) **em a**. Uma função **derivável** (diferenciável) é aquela que é derivável em cada ponto de seu domínio. O domínio de f ´ é o conjunto {x, f ´(x) existe) e pode ser menor que o domínio de f.

2 – A notação f' usada na definição anterior tem a vantagem de enfatizar que a derivada de f é uma outra função de x que está associada de certa maneira com a função f dada. Se a função é apresentada na forma y = f(x), com a variável dependente explícita, então o símbolo y' é usado em lugar de $f'(x)$. A derivada de y = f(x) é também indicada por $\frac{dy}{dx}$ e algumas vezes por $D_x y$.

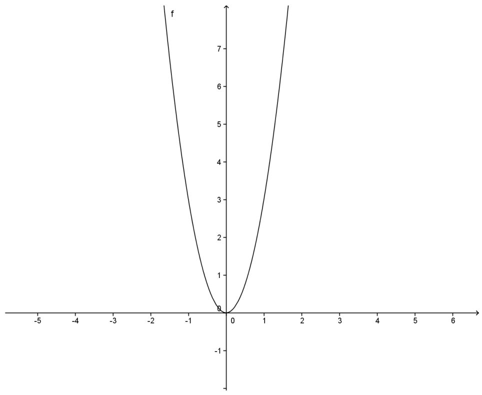
Interpretação Geométrica:



A derivada $f'(x)$ expressa o coeficiente angular da reta tangente à curva y = f(x) em função da coordenada x do ponto de tangência (desde que o limite exista).

Tendo em mente a interpretação geométrica da função derivada a partir do gráfico de uma função f podemos esboçar o gráfico da derivada f'.

Ao lado temos o gráfico de $f(x)=x^3$ e abaixo da sua derivada $f(x)=3x^2$



Taxa de Variação: A derivada $f'(x)$ expressa a taxa de variação (instantânea) de y = f(x) em relação a x.

Em Economia, o termo "marginal" é freqüentemente usado como um sinônimo de "derivada de" ou "taxa de variação instantânea de". Por exemplo, se C é a função custo tal que C(x) é o custo da produção de x unidades de uma mercadoria, $C'(x)$ é chamado de **custo marginal** da produção de x unidades e C' de **função custo marginal**. Desse modo, o custo marginal é a taxa de variação do custo da produção em relação ao número de unidades produzidas.

Lembremos do exemplo da aula passada:

Suponha que o custo semanal, em reais, para a fabricação de x geladeiras seja dado pela função $C(x) = 8.000 + 400x - 0{,}2x^2$ com $0 \le x \le 400$. Determine a taxa de variação da função custo em relação a x quando x = 250.

Solução: Queremos determinar a taxa de variação de C(x) em relação a x quando x = 250

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(250+\Delta x) - C(250)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8.000 + 400(250+\Delta x) - 0{,}2(250+\Delta x)^2 - 95.500}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{8.000 + 100.000 + 400\Delta x - 12.500 - 100\Delta x - 0{,}2\Delta^2 x - 95.500}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{300\Delta x - 0{,}2\Delta^2 x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(300 - 0{,}2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (300 - 0{,}2\Delta x) = 300$$

Resposta: O custo aumenta R$300,00 por geladeira quando estão sendo fabricadas 250 geladeiras.

A operação de encontrar a derivada de uma função é chamada **derivação** ou **diferenciação** e pode ser efetuada aplicando-se a definição de derivada. No entanto, como esse processo é usualmente demorado, precisamos de algumas regras (teoremas que são provados a partir da definição de derivada) que possibilitem encontrar a derivada de certas funções mais facilmente.

Regras básicas de derivação

Sendo $c \in$ IR, $n \in$ Q e u e v funções reais de variável x.

1) Regra da constante: Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$

2) Regra da identidade: Se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$

3) Regra da potência: Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n.x^{n-1}$

4) Regra da soma: Se $f(x) = u + v$ então $f'(x) = u' + v'$

5) Regra do produto: Se $f(x) = uv$ então $f'(x) = u'v + uv'$

6) Regra do produto por uma constante: Se $f(x) = c.u$ então $f'(x) = c.u'$

7) Regras do quociente: a) Se $f(x) = \frac{u}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

b) Se $f(x) = \frac{c}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{-cv'}{v^2}$

Exemplos 3.7:

1) $f(x) = 5x^4 – 2x^3 + x^2 – 3x$

2) $f(x) = 3x + 4\sqrt{x}$

3) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 5x)$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \frac{7}{5\sqrt[3]{x^2}}$

6) $f(x) = \frac{5x+7}{2x-1}$

7) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 – 2x$ no ponto $(– 1, 1)$.

8) Seja $C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$ o custo de produção de x brinquedos. Determine o custo marginal quando $x = 50$

9) Se $C(x) = 75x + 1250$ e $R(x) = – x^3 + 30x^2$ são, respectivamente, as funções custo e receita para x unidades de um produto fabricado e vendido por uma empresa, determine a função lucro marginal