Matemática Para Economia III

Solimá Gomes Pimentel

Universidade Federal Fluminense

IM - GAN

Niterói - 2009

Solimá Gomes Pimentel, ****-

Matemática para Economia III/Solimá Gomes Pimentel

2pt, ; 31cm

Inclui Bibliografia.

1. Matemática para Economia III

CDD ***

ISBN: *******

Prefácio

As disciplinas de Matemática em um curso de Economia têm por objetivo principal, tratar a análise econômica na qual o economista utiliza símbolos matemáticos para enunciar problemas e utilizar resultados matemáticos conhecidos para auxiliar na resolução dos mesmos.

O termo economia matemática, refere-se à aplicação da matemática aos aspectos puramente teóricos da análise econômica. A diferença entre a economia matemática e a economia puramente literária é que na primeira, premissas, conclusões e equações são enunciadas em símbolos matemáticos utilizando para isso, a lógica matemática e na segunda, são utilizadas palavras em sentenças utilizando a lógica literária.

A escolha da lógica matemática tem a vantagem de obrigar os analistas a enunciar suas premissas em cada fase do raciocínio. Isto porque resultados matemáticos normalmente são escritos na forma se...então . Em enunciados escritos desta forma, para se usar a parte do então (resultado do teorema) primeiramente têm que se ter certeza de que a parte do se (hipótese ou condição) está de acordo com as premissas tido como verdadeiras.

Um modelo econômico é uma estrutura teórica, não necessariamente matemática, contudo, se o modelo for matemático, usualmente consistirá em um conjunto de equações que descreverá a estrutura do modelo. Relacionando algumas variáveis entre si de forma adequada, essas equações dão forma matemática ao conjunto de premissas analíticas adotadas. Aplicando determinadas operações matemáticas a essas equações, podemos tentar obter um conjunto de conclusões que resultem logicamente dessas premissas.

Iniciaremos nossos estudos com a Álgebra Matricial. Nossa escolha se deve ao fato de que esta parte da matemática nos proporciona um modo compacto de escrever um sistema de equações, mesmo que ele seja muito grande. Além disso, a Álgebra Matricial nos leva a um modo de testar a existência de uma solução pela avaliação de um determinante e nos dá um método para achá-la, caso esta exista.

Uma pequena desvantagem na Álgebra Matricial é que ela se restringe, apenas, a sistemas de equações lineares. É claro que em situações reais poucos modelos são lineares, porém, em muitos casos, uma relação linear pode produzir uma aproximação suficientemente boa com uma relação não-linear. Assim, a restrição da linearidade não é tão restritiva quanto possa parecer a primeira vista.

O Autor

Rio de Janeiro, Agosto de 2009.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Considere um conjunto V no qual estão definidas duas operações: uma **adição**, que a cada para de elementos u e v de V associa um elemento $u+v$ de V, chamado “**soma**"de u e v, e uma **multiplicação por escalar**, que a cada número real α e a cada elemento v de V associa um elemento αv de V, chamado “**produto**"de α por v.

Definição 2.1. *Dizemos que o conjunto V munido dessas operações é um* ***espaço vetorial real*** *se são satisfeitas as seguintes condições, para todos os elementos de V, designados pelas letras u, v e w, e os números reais, designados pelas letras α e β:*

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ *(associatividade)*
2. $u+v = v+u$ *(comutativa)*
3. *Existe um elemento em V, designado por e, que satisfaz v + e = v para qualquer v em V (existência do elemento neutro para a adição)*
4. *Para cada $v \in V$, existe um elemento de V, designado por $-v$, que satisfaz v + (-v) = e (existência do elemento inverso aditivo, também chamado de simétrico ou oposto)*
5. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ *(associatividade)*
6. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ *(distributividade)*

7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(distributividade)*

8. $1.v = v$ *(multiplicação por 1)*

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de ***vetores****.*

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:*

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Exemplo 2.2. *Os conjuntos* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.3. *O conjunto das matrizes m x n com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 2.4. *O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau* $\leq n$*, mais o polinômio nulo, em relação às operações usais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.*

2.1 Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto S é um **subespaço vetorial** de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 2.1. *Um subconjunto S, não-vazio, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se estiverem satisfeitas as condições:*
(i) $\forall\ u,\ v \in S$ *tem-se* $u + v \in S$.
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*, se* $u \in S$*, tem-se* $\alpha u \in S$.

Exemplo 2.5. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço vetorial de V com as operações usuais.*

Exemplo 2.6. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, 4 - 2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço vetorial V com as operações usuais.*

2.2 Combinação Linear

Definição 2.2 (Combinação Linear)**.** *Sejam* $u_1, u_2, ..., u_n$*, vetores de um espaço vetorial* V*. Uma combinação linear destes vetores é uma expressão da forma* $a_1.u_1 + a_2.u_2 + ... + a_n.u_n = w$*, onde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são escalares. O vetor* w *é dito uma* ***combinação linear*** *dos vetores* $u_1, u_2, ..., u_n$ *.*

Exemplo 2.7. *O vetor* $u = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $(1, 2, -1)$ *e* $(1, 1, -1)$*, pois* $(1, 0, -1) = -1(1, 2, -1) + 2(1, 1, -1)$*.*

Exemplo 2.8. *Considerando os vetores* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ *e* $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$*, tem-se que qualquer vetor* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *pode ser escrito como combinação linear dos* e_i*, especificamente:*

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Definição 2.3 (Subespaço Gerado)**.** *Seja* V *um espaço vetorial. Considere* A *um subconjunto de* V *diferente do conjunto vazio,* $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$*. O conjunto* S *de todos os vetores de* V *que são combinações lineares dos vetores de* A *é um subespaço vetorial de* V *chamado de* ***subespaço gerado por A****.*

Exemplo 2.9. *O espaço* $S = \{(x, 2x);\ x \in \mathbb{R}\}$ *é o subespaço gerado pelo vetor* $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 2.10. *O subespaço* $\mathbb{R}^3$ *gerado pelos vetores* $u = (1, 2, 0), v = (3, 0, 1)$ *e* $w = (2, -2, 1)$ *é o plano de equação* $2x - y - 6z = 0$ *.*

2.3 Independência Linear

Definição 2.4. *Um conjunto de vetores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$*em um espaço vetorial* V *é chamado* ***linearmente independente*** *se a equação vetorial* $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$ *admite apenas a solução trivial* $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$*.*

Definição 2.5. *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é chamado* ***linearmente dependente*** *quando a equação acima admite alguma solução não trivial.*

Observação 2.1. *É comum usar a abreviação **LI** para conjuntos linearmente independentes e **LD** para os linearmente dependentes.*

Exemplo 2.11. *Um conjunto contendo um único vetor é linearmente independente se, e somente se,* $v \neq 0$.

Exemplo 2.12. *O conjunto* $\{(1,2,0),(3,0,1),(2,-2,1)\}$ *é LI em* $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.2. *Os vetores* $v_1, ..., v_n$ *são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros.*

Observação 2.3. *Dois vetores* v_1 *e* v_2 *são LD, se um vetor é múltiplo escalar do outro.*

Observação 2.4. *No espaço real* $\mathbb{R}^3$ *a dependência de vetores pode ser escrita geometricamente como segue:*
dois vetores u *e* v *são dependentes se, e somente se, estão na mesma reta passando pela origem;*
três vetores u, v *e* w *são dependentes se, e somente se, estão no mesmo plano passando pela origem.*

2.3.1 Base de um Subespaço Vetorial

Definição 2.6. *Se* V *é um espaço vetorial qualquer e* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é um conjunto de vetores em* V*, dizemos que* S *é uma **base** de* V *se:*
(a) S *é linearmente independente.*
(b) S *gera* V.

Exemplo 2.13. *O conjunto* $\{(1,2,0),(12,-6,5)\}$ *é uma base do subespaço* $S : 2x - y - 6z = 0$.

Observação 2.5. *Se* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial* V*, então todo conjunto com mais de* n *elementos será linearmente dependente.*

Observação 2.6. *Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.*

Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição 2.7. *Seja V um espaço vetorial.Se V possui uma base com n vetores, então V tem **dimensão n** e escreve-se dim V = n.*

Exemplo 2.14. *dim* $\mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 2.15. *dim* $\{0\} = 0$.

Exemplo 2.16. *dim* $M_{m \times n} = mxn$.

Observação 2.7. *Seja V um espaço vetorial tal que dim* $V = n$. *Se S é um subespaço de V, então* $\dim S \leq n$.

Observação 2.8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então:*
(i) Qualquer conjunto de $n+1$ *ou mais vetores é linearmente dependente.*
(ii) Qualquer conjunto linearmente independente é parte de uma base, isto é, pode ser estendido a uma base.
(iii) Um conjunto linearmente independente com n elementos é uma base.

Coordenadas de um vetor

Definição 2.8. *Sejam V um espaço vetorial,* $v \in V$ *e* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base qualquer de V. Podemos expressar v como uma combinação linear dos vetores desta base B, ou seja, existem números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *tais que* $v = a_1v_1 +, a_2v_2 + ... + a_nv_n$ *. Os números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são as **coordenadas do vetor v na base B** e se representa por*

$$[v]_B = (a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

.

Exemplo 2.17. *No* $\mathbb{R}^2$, *considere as bases* $A = \{(1,0),(0,1)\}, B = \{(2,0),(1,3)\}$ *e* $C = \{(1,-3),(2,4)\}$. *Dado o vetor v = (8,6), tem-se:*

$$[v]_A = (8,6); \quad [v]_B = (3,2); \quad [v]_C = (2,3)$$

4ª Lista de Exercícios

1. Expresse o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0), v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

2. Determine os subespaços do $\mathbb{R}^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{(2, -1, 3)\}$.
   (b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$.
   (c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$.

3. Determine o valor de "k"para que o conjunto $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$ seja LI.

4. Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 2x\}$
   (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 3z = 0\}$
   (d) $S = \{(x, y, x);\ x, y \in \mathbb{R}\}$
   (e) $S = \{(x, y, z, w);\ x - 3y + z = 0\}$
   (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 3y,\ e\ z = -y\}$

5. Encontre a dimensão e o espaço gerado por:

   (i) $(1, -2, 3, -1)$ e $(1, 1, -2, 3)$.
   (ii) 3 e -3.
   (iii) $t^3 - 2t^2 + 5$ e $t^2 + 3t - 4$.

6. Seja o conjunto $A = \{w_1, w_2\}$, sendo $w_1 = (-1, 3, -1), w_2 = (1, -2, 4)$. Determine:

   (a) O subespaço S gerado pelo conjunto A.
   (b) O valor de "k"para que o vetor $w = (5, k, 11)$ pertença à S.

7. Considere $S = [(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)]$, o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(2, 1, 0), (1, -1, 2)$ e $(0, 3, -4)$. Determine sua equação.

8. Para qual valor de “k"será o vetor $u = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$ uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

9. Determine “m"para que o conjunto
   $\{(2, -3, 2m), (1, 0, m + 4), (-1, 3, m - 2)\}$ seja L.I.

2.4 Transformações lineares

Definição 2.9. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação Uma transformação $T : V \to W$ é chamada* ***transformação linear*** *de V em W se:*

1.- $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \Re$.

Observação 2.9. *Uma transformação linear de V em V é chamada operador linear sobre V.*

Exemplo 2.18. *A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, x + 3y)$ é linear.*

Sejam (x, y) e (z, w) vetores do $\mathbb{R}^2$.

$T[(x, y) + (z, w)] = T(x + z, y + w) = (2(x + z) + (y + w), (x + z) + 3(y + w))$

$= ((2x+y)+(2z+w), (x+3y)+(z+3w)) = ((2x+y), (x+3y))+((2z+w), (z+3w)) = T(x, y) + T(z, w)$.

Também, $T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x + 3\alpha y) = (\alpha(2x + y), \alpha(x + 3y)) =$

$= \alpha(2x + y, x + 3y) = \alpha T(x, y)$.

Exemplo 2.19. *A transformação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = 3x + 1$ não é linear.*

Se u=1 e v=3, $T(1 + 3) = T(4) = 13 \neq T(1) + T(3) = 4 + 10 = 14$.

Propriedades

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$uma trnsformação linear. Valem as seguintes propriedades:

1. $T(0_V) = 0_W$, ou seja, a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W.

2. $T(-v) = -T(v)$

3. Se U é um subespaço de V então $T(U)$ é um subespaço de W.

4. Dados$v_1, v_2, ..., v_n \in V$,

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

5. Uma transformação linear T: $V \to W$ fica completamente definida quando se conhece a imagem dos vetores de uma base de V.

6. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto gerador de V então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é um conjunto gerador da imagem de T.

7. Se $T(v_1), ..., T(v_n)$ são LI então os vetores $v_1, ..., v_n$ são LI.

Núcleo de uma Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma trnsformação linear.

Definição 2.10. *Chamamos de* ***núcleo*** *de T, representado por $N(T)$, o seguinte conjunto:*

$$N(T) = \{v \in V \ ; \ T(v) = 0_W\}$$

Exemplo 2.20. *$T : V \to W$ a transformação linear nula. É fácil ver que seu núcleo é todo espaço V.*

Exemplo 2.21. *O núcleo da transformação identidade é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de V.*

Imagem de uma Transformação Linear

Definição 2.11. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. A* ***imagem de T****, representado por Im (T), é o seguinte conjunto:*

$$Im(T) = \{w \in W \ ; \ w = T(v), \mathit{para\ algum}\ v \in V\}$$

Exemplo 2.22. *$T : V \to W$ a transformação linear nula, sua imagem é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de W.*

Exemplo 2.23. *A imagem da transformação identidade, definida no espaço vetorial V, é o espaço V.*

Teorema 2.2. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T é um subespaço de V.*

Teorema 2.3. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é um subespaço de W.*

Teorema 2.4 (Teorema da Dimensão)**.** *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então*

$$dim\, V = dim N(T) + dim Im(T).$$

2.5 Representação Matricial de uma Transformação Linear

Dados V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ linear, queremos determinar uma matriz M que nos possibilite escrever: $T(v) = Mv$, para todo $v \in V$.
Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W. Consideremos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, então $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de V e W. Um vetor $v \in V$, pode ser expresso como:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

Daí,

$$T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3$$

Por outro lado,

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2)$$

Sendo $T(v_1)$ e $T(v_2)$ vetores de W, eles são combinações lineares de B:

$$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3$$

$$T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3$$

Logo,

$$T(v) = x_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3) + x_2(a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3)$$

Ou,

$$T(v) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) w_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) w_2 + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2) w_3$$

Portanto,

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A.[v]_A,$$

Sendo, $[T]_B^A$ denominada **matriz de T em relação as bases A e B**.
Observe que as colunas da matriz $[T]_B^A$ são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base B.

Exemplo 2.24. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por* $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$. *Considere as bases*
$A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ *e* $B = \{(2, 1), (5, 3)\}$. *Determine* $[T]_B^A$.
A matriz é de ordem 2 x 3:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$[T(1, 1, 1)]_B = (a_{11}, a_{21})$

$$T(1, 1, 1) = (2, 2) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{11} = -4 \\ a_{21} = 2 \end{array}$$

$$T(0, 1, 1) = (0, -1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{12} = 5 \\ a_{22} = -2 \end{array}$$

$$T(0, 0, 1) = (1, -2) = a_{13}(2, 1) + a_{23}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{13} = 13 \\ a_{23} = -5 \end{array}$$

Logo,

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

No caso de serem A e B bases canônicas, representa-se a matriz simplesmente por $[T]$, que é chamada **matriz canônica** de T.

Exemplo 2.25. *Para* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (3x - 2y, 4x + y, x)$*, sua matriz canônica é* $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Transformação Linear associada a uma Matriz

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é determinada por:

$$T_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Escrevemos

$$T_A(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & ... & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.26. *Seja a matriz:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. *Essa matriz determina uma transformação linear,* $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T_A(x, y) = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x + 2y, -2x + 3y, 4y)$$

Mudança de Base

Sejam V um espaço vetorial, I o operador identidade, A e B duas bases de V e $v \in V$, a matriz de I, em relação às bases A e B (representada por$[I]_B^A$), é tal que

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A$$

A matriz $[I]_B^A$ é chamada matriz **mudança da base** de A para a base B.

O papel desta matriz é transformar as coordenadas de um vetor v na base A em coordenadas dó mesmo vetor v na base B.

Exemplo 2.27. *Sendo* $A = \{(1,1),(2,1)\}$ *e* $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$*, determine a matriz de mudança de base A para a base B.*

$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $[(2,1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Logo,* $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5ª *Lista de Exercícios*

1. Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a. $T : \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x + 3y)$

b. $T : \Re^2 \to \Re^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$

c. $T : \Re^3 \to \Re^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$

2. Verifique em que caso(s) a função $T : \Re^2 \to \Re^3$ definida por $T(x, y) = (x + my, x + m, y)$ é linear:

a. $m = x$ b. $m = 1$ c. $m = 0$

1. Determine a transformação linear $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$. Encontre $v \in \Re^2$ tal que $T(v) = (5, 3, 2)$.

2. Qual a transformação linear $S : \Re^3 \to \Re^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$, $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$.

3. Seja $T : \Re^3 \to \Re^2$ a transformação linear definida por

$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$. Considere as bases $A = \{$(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)$\}$ e $B = \{$(2,1), (5,3)$\}$. Determine $[T]_B^A$.

6. Dadas as bases A=$\{$(1,1), (1,0) do $\Re^2$ e $B = \{$(1,2,0), (1,0,-1), (1,-1,3)) do $\Re^3$, determinar a transformação linear T: $\Re^2 \to \Re^3$ cuja matriz é: $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A=$\{$(1, 3), (2, -4)$\}$ determine a base B.

2.6 Autovetores e Autovalores

Definição 2.12. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V, v \neq 0$ é* ***autovetor*** *(vetor próprio ou vetor característico) do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.*
O número real λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado ***autovalor****(valor próprio ou valor característico) de T associado ao autovetor v.*

Exemplo 2.28. *O vetor $v = (5, 2)$ é autovetor do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ associado ao autovalor $\lambda = 6$, pois*

$$T(v) = T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2) = 6v$$

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se v e λ são respectivamente, autovetor e o correspondente autovalor do operador T, tem-se

$$Av = \lambda v, \text{ ou, } Av - \lambda v = 0$$

Pode-se escrever

$$Av - \lambda I v = 0, \text{ ou, } (A - \lambda I)v = 0$$

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não-nulas, deve-se ter

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Ou,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

A equação $det(A - \lambda I) = 0$ é denominada **equação característica** do operador T ou da matriz A, e suas raízes são os autovalores de T ou de A. O determinante $det(A-\lambda I)$ é um polinômio em λ denominado **polinômio característico**.

2.6.1 Determinação de Autovetores

A substituição de λ pelos seus valores no sistema de equações lineares $(A - \lambda I)v = 0$ permite determinar ao autovetores associados.

Exemplo 2.29. *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$*, o polinômio característico de A é dado por:*

$$p(x) = det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2 & x-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-6) + 6 = x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$$

Logo, as raízes do polinômio característico são 4 e 3, ou seja, os autovalores de A são 4 e 3.
Se o autovalor $\lambda = 4$*,*

$$\begin{bmatrix} 4-1 & -3 \\ 2 & 4-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema temos que x = y. Assim os vetores do tipo (x, x), $x \neq 0$ *são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda = 4$*.*
Se o autovalor $\lambda = 3$*,*

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -3 \\ 2 & 3-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema temos que 2x = 3y. Assim os vetores do tipo $(3y/2, y)$*,* $y \neq 0$ *são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda = 3$*.*

Propriedades

1. Se v é um autovetor associado ao autovalor λ de um operador linear T, o vetor αv, para qualquer real $\alpha \neq 0$, é também autovetor de T associado ao mesmo λ.

2. Se λ é um autovalor de um operador
   $T : V \to V$, o conjunto S_λ de todos os vetores $v \in V$, inclusive o vetor nulo, associados ao autovalor λ, é um subespaço vetorial de V.

2.6.2 Diagonalização de Operadores

Dado um operador linear $T : V \to V$, a cada base B de V corresponde uma matriz $[T]_B$ que representa T na base B. Nosso objetivo é obter uma base do espaço de modo que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante e T. Veremos que essa matriz é uma matriz diagonal.

Propriedades

1. Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T : V \to V$ são LI.

2. Se $T : V \to V$ é linear, $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, formado pelos correspondentes autovalores, é uma base de V.

Definição 2.13. *Um operador linear $T : V \to V$ é* ***diagonalizável*** *se existe uma base de V formada por autovetores de T.*

Exemplo 2.30. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável.

Primeiramente devemos calcular o polinômio característico de A. Esse polinômio é dado por

$$p(x) = det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & -4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (x-5)(x-2) - 4 = (x-1)(x-6)$$

Ou seja, o polinômio característico de A é:

$$p(x) = (x-1)(x-6).$$

Logo, os autovalores são 1 e 6.

Agora para que possamos analisar se A é ou não diagonalizável, precisamos verificar se os seus autovetores são linearmente independentes, ou seja se os autovetores formam *uma base de* $\mathbb{R}^2$.

Se λ*= 1, temos que:*

$$(1I_2 - A)v = 0, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema é equivalente a: $x = -y$, *logo todas as soluções são da forma:*

$$(-y, y) = y(-1, 1), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

Portanto $v_1 = (-1, 1)$ *é o autovetor associado a* $\lambda = 1$.

Se λ*= 6, temos que*

$$(6I_2 - A)v = 0, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema é equivalente a $x = 4y$, *logo todas as soluções são da forma:*

$$(4y, y) = y(4, 1), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

Portanto $v_2 = (4, 1)$ *é o autovetor associado a* $\lambda = 6$. *Logo os autovetores associados a autovalores distintos são LI. Daí concluímos que o conjunto de autovetores* $\{v_1, v_2\}$ *é linearmente independente, ou seja, A é diagonalizável.*

6ª *Lista de Exercícios*

1. Verifique, em cada caso, se v é um autovetor da matriz A. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Verifique, em cada caso, se λ é um autovalor de A. Caso seja, determine um autovetor associado a este autovalor λ.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 6$.

4. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   Determine seus autovalores e uma base para o auto espaço associado a cada autovalor.

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule os autovalores das matrizes $A2$ e $A3$.

6. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine um autovalor e uma base para o auto-espaço associado a este autovalor.

7. Seja A matriz de ordem n. Prove que A e sua transposta At têm o mesmo polinômio característico.

8. Mostre, em cada caso, que as matrizes abaixo são diagonalizáveis.

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

11. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

12. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e defina T: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$ por $T(v) = A.v.$ Mostre que $v1$= (1,1) é autovetor de T e que o operador linear T não é diagonalizável.