GABARITO

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 2.1-4.5 2.1-5.4

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática

2ª Prova de Álgebra Linear Aplicada - Tipo A	Turma E 1	2011/1	Profª. Ana Maria Luz

ATENÇÃO: Respostas sem justificativas **NÃO** serão aceitas. !

1ª Questão [2,0 pontos] Determine se os seguinte vetores formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:

a) (1, 1, 1), (1, -1, 5) e (0, 1, 0) 0,5

b) (1, 1, 1) e (1, 2, 3) 0,5

c) (1, 1, 2), (1, 2, 5) e (5, 3, 4) 0,5

d) (1, 2, 3), (1, 0, -1),(3, -1, 0) e (2, 1, -2) 0,5

2ª Questão [2,0 pontos] Identifique a superfície determinada por

$$x^2 + 2y^2 - 8y - 2z^2 + 16z - 40 = 0$$ 1,0

a)Determine o traço com o plano xOy. 0,5 b)Determine o traço com o plano yOz. 0,5

3ª Questão [2,0 pontos]

a) Encontre a equação polar de: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 0,5 e $y = -2$. 0,5

b) Encontre a equação cartesiana de: $\rho = 5$ 0,5 e $\theta = \pi/3$. 0,5

4ª Questão [1,5 pontos] Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y, z) = (x + y, y - z),$$

E considere as bases $A = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$ e $B = \{(3, 0), (1, 1)\}$ para o $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
a) Determine $[T]_B^A$. 1,0 b) Sendo $v = (5, 1, -2)$ calcular $[T(v)]_B$. 0,5

5ª Questão [2,5 pontos] Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x^2 + (b + c)x$$

a) $-4x^2 + 2x - 2$ pertence a N(T)? 0,25

b) $x^2 + 2x + 1$ pertence a Im(T)? 0,25

c) Determine o Núcleo de T, uma base para N(T) e sua dimensão.
0,3 0,3 0,3

d) T é injetora? 0,2

e) Determine a Imagem de T, uma base para Im(T) e sua dimensão.
0,3 0,3 0,3

f) T é sobrejetora?
0,2

BOA PROVA!!!

GABARITO PROVA 2 TIPO A - ÁLGEBRA LINEAR APLICADA

1 ← lista de espaços vetoriais parte I

b) e d) não formam uma base do $\mathbb{R}^3$ porque uma base do $\mathbb{R}^3$ deve conter 3 vetores pois $\mathbb{R}^3$ é de dimensão 3

a e c) Os vetores formam uma base se, e somente se, são L I, uma forma de verificar se são L I é construindo uma matriz A com os vetores como linha, se $\det A \neq 0$ os vetores são L I

(det $A \neq 0 \Rightarrow$ A é inversível $\Rightarrow$ a transformação linear definido por ela é injetora $\Rightarrow$ o núcleo só tem o vetor nulo, ou seja, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores linha é quando os escalares forem todos iguais a zero)

Se $\det A = 0$ os vetores linha são L.D, alguma linha pode ser escrita como combinação linear de outra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 5 = -4 \neq 0$$

logo

$\{(1,1,1), (1,-1,5), (0,1,0)\}$ é L.I

Qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^3$ com <u>3</u> vetores L.I é uma base do $\mathbb{R}^3$ Portanto

$\{(1,1,1), (1,-1,5), (0,1,0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det C = 8 + 25 + 6 - 20 - 15 - 4 = 0$$

$\{(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)\}$ é LD

portanto $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ não formo uma base

② $x^2 + 2y^2 - 8y - 2z^2 + 16z - 40 = 0$ completando quadrados

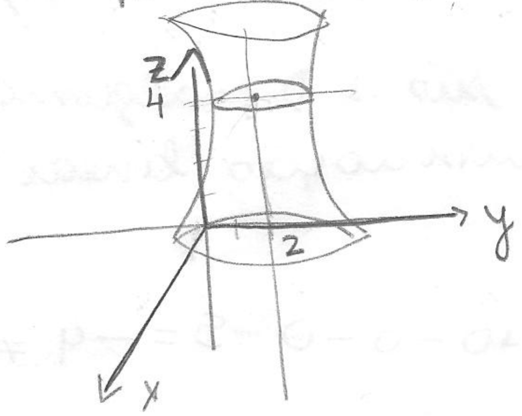
$$x^2 + 2y^2 - 8y + 8 - 2z^2 + 16z - 32 - 40 = +8 - 32$$

$$x^2 + 2(y^2 - 4y + 4) - 2(z^2 - 8z + 16) = -24 + 40$$

$$x^2 + 2(y-2)^2 - 2(z-4)^2 = 16 \quad \div 16$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{8} - \frac{(z-4)^2}{8} = 1$$

hiperbolóide de uma folha ao longo de um eixo paralelo a z centrado em $(0,2,4)$



Ou

Se fizer a mudança

$\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = (y-2)$ e $\tilde{z} = z - 4$ obtemos

$$\frac{\tilde{x}^2}{16} + \frac{\tilde{y}^2}{8} - \frac{\tilde{z}}{8} = 1$$

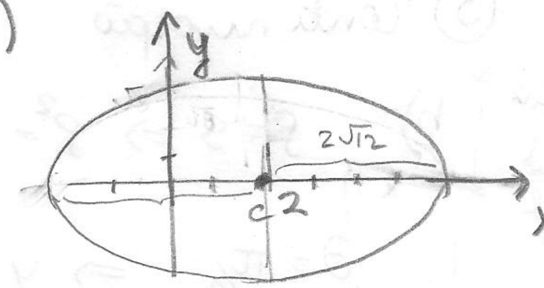
hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo $\tilde{z}$

2 continuação

Traço no plano XOY (z=0)

a) Elipse de equação

$$x^2+2y^2-8y-40=0$$
$$x^2+2(y^2-4y+4)-40=8$$
$$x^2+2(y-2)^2=48$$
$$\frac{x^2}{48}+\frac{(y-2)^2}{24}=1$$



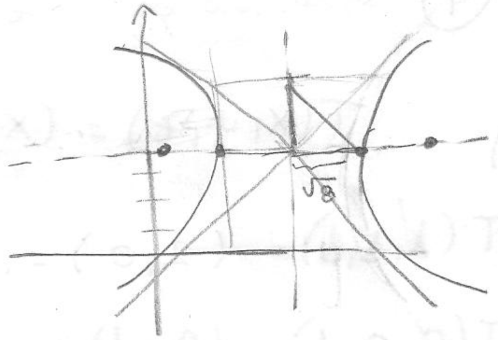
(centro (0,2)

eixo maior em x $\left(\begin{array}{l} a^2=48 \\ a=2\sqrt{12} \end{array}\right)$

b) Traço no plano yOz (x=0)

$$\frac{(y-2)^2}{8}-\frac{(z-4)^2}{8}=1$$

é hipérbole equilátera de centro (2,4)



3 a) $(x-1)^2+y^2=1$ lista! coordenadas polares $\left(\begin{array}{ll} x=\rho\cos\theta & x^2+y^2=\rho^2 \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta & \text{tg}\,\theta=\dfrac{y}{x} \end{array}\right)$

$$x^2-2x+1+y^2=1$$
$$x^2+y^2-2x=0$$
$$\rho^2-2\rho\cos\theta=0 \qquad \div\rho \text{ (assumindo } \rho\neq 0)$$
$$\rho-2\cos\theta=0$$
$$\boxed{\rho=2\cos\theta}$$ equação polar

$y=-2$ feito em sala!

como

$y=\rho\,\text{sen}\,\theta$

então

$\rho\,\text{sen}\,\theta=-2$ equação polar

$$\boxed{\rho=\frac{-2}{\text{sen}\,\theta}=-2\,\text{cossec}\,\theta}$$

sen $\theta\neq 0$ e como queremos cobrir a reta $y=-2 \Rightarrow \boxed{\theta\in(-\pi,\pi)}$

③ continuação

lista de coord. pol.

b) $\rho = 5 \Rightarrow \rho^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=25}$

$\theta = \pi/3 \Rightarrow \dfrac{y}{x} = tg\ \pi/3 \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x}$

④ questão 6 lista de transformações lineares

a) $T(x,y,z) = (x+y, y-z)$

$T(1,1,1) = (2,0) = \frac{2}{3}(3,0) + 0(1,1)$

$T(0,0,1) = (0,-1) = \frac{1}{3}(3,0) - 1(1,1)$

$T(-1,1,1) = (0,0) = 0(3,0) + 0(1,1)$

$$[T]^A_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $T(5,1,-2) = (6,3) = 1(3,0) + 3(1,1)$

$\Rightarrow [T(5,1,-2)]_B = (1,3)$

Outra forma de fazer:

$[T(v)]_B = [T]^A_B [v]_A$

$(5,1,-2) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(-1,1,1)$

$\alpha_1 - \alpha_3 = 5$
$\alpha_1 + \alpha_3 = 1$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -2$

$2\alpha_1 = 6$
$\alpha_1 = 3 \Rightarrow \alpha_3 = -2$
$\alpha_2 = -3$

4 continuação

$(5,1,-2) = 3(1,1,1) + (-3)(0,0,1) + (-2)(-1,1,1)$

$[v]_A = (3,-3,-2)$

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$[T(v)]_B = (1,3)$

5 parecido com a questão 4 da lista de transformações!

$T(ax^2+bx+c) = (a+2b)x^2 + (b+c)x$

a) $T(-4x^2+2x-2) = \underbrace{(-4+2.2)}_{0}x^2 + \underbrace{(2+(-2))}_{0}x = 0$

$\Rightarrow -4x^2+2x-2 \in N(T)$

b) $1x^2 + 2x + 1x^0 = (a+2b)x^2 + (b+c)x + 0x^0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b=1 \\ b+c=2 \\ 0=1 \text{ Absurdo!} \end{array}\right\} \text{sistema incompatível}$$

$x^2+2x+1 \notin Im(T)$

c) $N(T) = \{ax^2+bx+c, (a+2b)x^2+(b+c)x = 0\}$

$a+2b=0$

$b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow a=2c$

$N(T) = \{2cx^2 - cx + c,\ c \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = \{c(2x^2 - x + 1),\ c \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = [2x^2 - x + 1]$

Uma base para $N(T) = \{2x^2 - x + 1\}$

$\dim N(T) = 1$ d) $N(T)$ não é injetora pois $N(T) \neq \{0\}$

e) Um vetor pertencente a imagem de T é da forma

$$(a+2b)x^2 + (b+c)x$$

podemos ver que o vetor da imagem é combinação dos vetores x^2 e x

$Im(T) = [x^2, x]$ (o espaço gerado pelos vetores x^2 e x)

$\{x^2, x\}$ é LI pois $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x = 0 \iff \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$

então $\{x^2, x\}$ é uma base de $Im(T)$

$\dim Im(T) = 2$ (2 vetores na base)

f) T não é sobrejetora pois

$$\dim Im(T) \neq \dim P_2(\mathbb{R})$$

$$\left(\underbrace{\dim P_2(\mathbb{R})}_{3} = \underbrace{\dim N(T)}_{1} + \underbrace{\dim Im(T)}_{2} \right)$$