GABARITO

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática

2ª Prova de Álgebra Linear Aplicada - Tipo B	Turma E 1	2011/1	Profª. Ana Maria Luz

ATENÇÃO: Respostas sem justificativas **NÃO** serão aceitas.

1ª Questão [2,0 pontos] Identifique a superfície determinada por

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2z^2 + 16z - 40 = 0$$ 1,0

a)Determine o traço com o plano xOz. 0,5 b)Determine o traço com o plano xOy. 0,5

2ª Questão [2,0 pontos]

a) Encontre a equação polar de: $y = -2$ (0,5) e $x^2 + (y-2)^2 = 4$. (0,5)

b) Encontre a equação cartesiana de: $\rho = 9$ (0,5) e $\theta = \pi/6$. (0,5)

3ª Questão [2,0 pontos] Determine se os seguinte vetores formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:

a) (1, 1, 1) e (1, 2, 3) 0,5

b) (1, 1, 2), (1, 2, 5) e (5, 3, 4) 0,5

c) (1, 2, 3), (1, 0, -1),(3, -1, 0) e (2, 1, -2) 0,5

d) (1, 0, 1), (1, -1, 5) e (0, 1, 1) 0,5

4ª Questão [2,5 pontos] Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (2a + b)x^2 + (b + c).$$

a) $-4x^2 + 2x - 2$ pertence a N(T)? 0,25

b) $x^2 + 2x + 1$ pertence a Im(T)? 0,25

c) Determine o Núcleo de T (0,3), uma base para N(T) (0,3) e sua dimensão. (0,3)

d) T é injetora? 0,2

e) Determine a Imagem de T (0,3), uma base para Im(T) (0,3) e sua dimensão. (0,3)

f) T é sobrejetora? 0,2

5ª Questão [1,5 pontos] Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y, z) = (x + y, y - z),$$

E considere as bases $A = \{(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$ e $B = \{(5,0), (1,1)\}$ para o $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
a) Determine $[T]_B^A$. (1,0) b) Sendo $v = (5, 1, -2)$ calcular $[T(v)]_B$. (0,5)

BOA PROVA!!!

GABARITO - TIPO B

1) $2x^2+y^2-8x-2z^2+16z-40=0$ completando quadrados

$$2x^2-8x\underbrace{+8}+y^2 \quad -2z^2+16z\underline{-32}-40=0+8-32$$

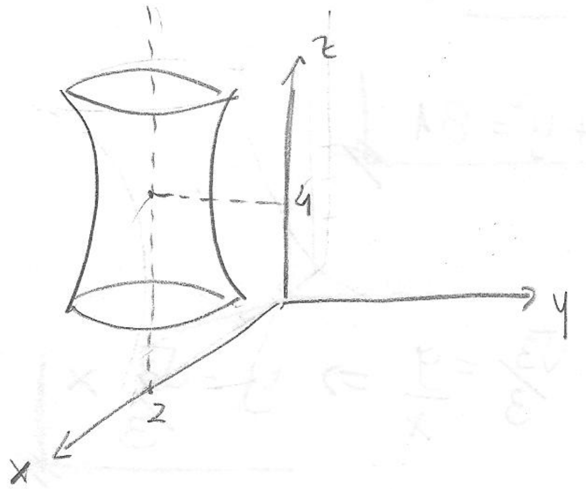
$$2(x^2-4x+4)+y^2-2(z^2-8z+16)=-24+40$$

$$2(x-2)^2+y^2-2(z-4)^2=16 \quad \div 16$$

(1,0)

$$\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{16}-\frac{(z-4)^2}{8}=1$$

hiperbolóide de 1 folha ao longo de um eixo paralelo ao eixo z centrado em (2,0,4)



Ou se fizer a mudança

$\tilde{x}=x-2 \quad \hat{y}=y, \quad \tilde{z}=z-4$

$$\frac{\tilde{x}^2}{8}+\frac{\bar{y}^2}{16}-\frac{\tilde{z}}{8}=1$$

hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo $\tilde{z}$

a) Traço no plano xoz (y=0)
hipérbole equilátera de centro (2,4) no plano xOz

$$\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(z-4)^2}{8}=1$$

(0,5)

b) Traço no plano xOy (z=0)
Elipse de centro (2,0)

$$2x^2+y^2-8x-40=0$$

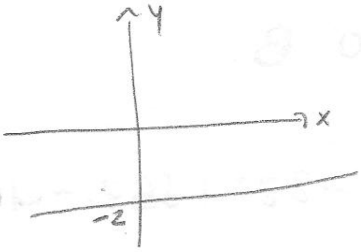
$$2(x^2-4x+4)+y^2-40=8$$

$$2(x-2)^2+y^2=48$$

$$\frac{(x-2)^2}{24}+\frac{y^2}{48}=1$$

(0,5)

② a) $y=-2$



$\rho\,\text{sen}\,\theta=-2$

$$\boxed{\rho=\frac{-2}{\text{sen}\,\theta}}$$

0,5

$\text{sen}\,\theta\neq 0$ e queremos cobrir a reta $y=-2 \Rightarrow \boxed{\theta\in(-\pi,\pi)}$

$x^2+(y-2)^2=4$

$\underbrace{x^2+y^2}-2y+\cancel{4}=\cancel{4}$

$\rho^2-2\rho\,\text{sen}\,\theta=0 \quad \div\rho$ (assumindo $\rho\neq 0$)

$\rho-2\,\text{sen}\,\theta=0 \Longrightarrow \boxed{\rho=2\,\text{sen}\,\theta}$ 0,5

b) $\rho=9 \Rightarrow \rho^2=81 \Rightarrow \underline{x^2+y^2=81}$

$\theta=\pi/6$

$\text{tg}\,\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \text{tg}\,\frac{\pi}{6}=\frac{y}{x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{y}{x} \Rightarrow \underline{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x}$

③ (0,5 cada uma, só válido se estiver com justificativa!)

a) e c) não formam uma base, porque como $\dim\mathbb{R}^3=3$ qualquer base do $\mathbb{R}^3$ tem que ter 3 vetores

b) se $M=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\5&3&4\end{pmatrix}$. $\det M=0 \Rightarrow \{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ é LD

Não formam uma base

d) se $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&5\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\det A=-1+1+0-0-0-5=-5$

③ d) continuação ②

$\det A \neq 0 \Rightarrow \{(1,0,1),(1,-1,5),(0,1,1)\}$ é LI

$\Rightarrow$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$

(Qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^3$ com <u>3</u> vetores <u>LI</u> é uma base do $\mathbb{R}^3$)

④ $T(ax^2+bx+c) = (2a+b)x^2 + (b+c)$

a) $T(-4x^2+2x-2) = \underbrace{(2(-4)+2)}_{-6}x^2 + \underbrace{(2+(-2))}_{0}$

$T(-4x^2+2x-2) = -6x^2$

$\Rightarrow -4x^2+2x-2 \notin N(T)$ 0,25

b) $1x^2+2x+1.x^0 = (2a+b)x^2 + 0.x + (b+c)\underbrace{x^0}_{1}$

0,25

$1 = 2a+b$

$2 = 0$ Absurdo!

$1 = b+c$

Sistema incompatível!

$1x^2+2x+1 \notin Im(T)$

c) $N(T) = \{ax^2+bx+c,\ (2a+b)x^2+(b+c)x = 0\}$

$2a+b=0 \qquad 2a = +c \Rightarrow a = +c/2$

$b+c=0 \Rightarrow b=-c$

$N(T) = \{+\frac{c}{2}x^2 - cx + c,\ c \in \mathbb{R}\}$

$= \{c(\frac{1}{2}x^2 - x + 1),\ c \in \mathbb{R}\}$

0,3 $N(T) = [\frac{1}{2}x^2 - x + 1]$ (espaço gerado pelo polinômio $\frac{1}{2}x^2 - x + 1$)

0,3 + 0,3 $B = \{\frac{1}{2}x^2 - x + 1\}$ é uma base, $\dim N(T) = 1$

④ d) T não é injetora pois $N(T) \neq \{0\}$ 0,2

e) Todo vetor pertencente a imagem é da forma

$$(2a+b)x^2 + (b+c).1$$

Podemos ver que o vetor da imagem é combinação dos vetores x^2 e 1, portanto

$Im(T) = [x^2, 1]$ 0,3 espaço gerado pelos vetores x^2 e 1

$\{x^2, 1\}$ é LI pois $\alpha_1 . x_2 + \alpha_2 . 1 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

então $\{x^2, 1\}$ é uma base de $Im(T)$ 0,3

$\dim Im(T) = 2$ (2 vetores na base) 0,3

f) T não é sobrejetora pois $\dim Im(T) \neq \dim P_2(\mathbb{R})$

(Pelo Teo. do Núcleo e Imagem

$$\underbrace{\dim P_2(\mathbb{R})}_{3} = \underbrace{\dim N(T)}_{1} + \underbrace{\dim Im(T)}_{2}$$) 0,2

⑤ $T(x,y,z) = (x+y, y-z)$

a)

$T(1,1,1) = (2,0) = \frac{2}{5}(5,0) + 0(1,1)$

$T(0,0,1) = (0,-1) = \frac{1}{5}(5,0) + (-1)(1,1)$

$T(-1,1,1) = (0,0) = 0(5,0) + 0(1,1)$

$$[T]^A_B = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1,0

b) $T(5,1,-2) = (6,3) = \frac{3}{5}(5,0) + 3(1,1)$

$[T(5,1,-2)]_B = (3/5, 3)$ 0,5