GABARITO - PROVA TURMA B2

1ª Questão

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ 24 \mid x\}$ 0,2

$B = \{x \in \mathbb{N};\ 2 \mid x\}$ 0,2

$C = \{X \in \mathcal{U},\ X = \emptyset\}$ 0,2

b) - $A \subseteq B$? Verdadeiro 0,3

Prova:

Seja $x \in A$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 24k = 2(12k)$
Seja $q = 12k$ temos que $q \in \mathbb{N}$ e podemos escrever
$x = 2q$. Logo $x \in B$.

- $B \subseteq A$? Falso 0,3

Contra exemplo:

$2 \in B$ e $2 \notin A$ uma vez que 2 não é divisível por 24

- $C \in P(B)$? Falso 0,3

$C = \{\emptyset\}$ ... Temos que $\emptyset \in P(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \dots, \{0,2\}, \{0,4\}, \dots$
e não $\{\emptyset\}$ $\{2,4\}, \{2,6\}, \{2,8\}, \dots \}$

2ª Questão:

Prova (por indução em n):

Seja $n \in \mathbb{N}$

Base da indução Para $n=0$ temos que

$0^3 + 2 \cdot 0 = 0$ é divisível por 3 $(0 = 3 \cdot 0)$.

Hipótese de indução suponho que para $n = k$,
$k \in \mathbb{N}$, temos que

$k^3 + 2k$ é divisível por 3, ou seja, existe $c \in \mathbb{N}$
tal que

$$k^3 + 2k = 3c$$

Passo da indução:

Pelo hipótese de indução temos que

$k^3+2k=3c$ somando 3 em ambos os lados

$k^3+2k+3=3c+3$ multiplicando ambos os lados por $k+1$

$$(k^3+2k+3)(k+1)=(3c+3)(k+1)$$

$$[k^2+2k+1+2](k+1)=3ck+3c+3k+3$$

$$[(k+1)^2+2](k+1)=3(ck+c+k+1)$$

$$(k+1)^3+2(k+1)=3q$$

onde $q=ck+c+k+1 \in \mathbb{N}$

Portanto $(k+1)^3+2(k+1)$ é divisível por 3

Conclusão Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que n^3+2n é divisível por 3. ■

3ª questão

$$[A\cup(B\cap C)]\cap([\bar{A}\cup(B\cap C)]\cap\overline{(B\cap C)})=$$

$$=([A\cup(B\cap C)]\cap[\bar{A}\cup(B\cap C)])\cap\overline{(B\cap C)} \quad (P2)$$

$$=([(B\cap C)\cup A]\cap[(B\cap C)\cup\bar{A}])\cap\overline{(B\cap C)} \quad (P1)$$

$$=((B\cap C)\cup(A\cap\bar{A}))\cap\overline{(B\cap C)} \quad (P3)$$

$$=((B\cap C)\cup\emptyset)\cap\overline{(B\cap C)} \quad (P5)$$

$$=(B\cap C)\cap\overline{(B\cap C)} \quad (P4)$$

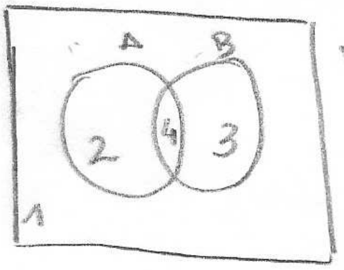
$$=\emptyset \quad (P5)$$ ■

4ª Questão

(Quem fez confusão entre rótulos e conjuntos mas fezas contas corretas 0,8 pt)

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ Falso!

Contra-Exemplo:



$U = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{2, 4\}$ $\overline{A} = \{1, 3\}$

$B = \{3, 4\}$ $\overline{B} = \{1, 2\}$

$A \cap B = 4$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$

$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3\}$

$2 \in \overline{A \cap B}$ e $3 \in \overline{A \cap B}$ mas não pertencem a $\overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Prova.

Seja $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$

se não colocou 0,9

Caso 1: Se $(x, y) \in (A \times B)$ então $x \in A$ e $y \in B$ para quaisquer C e D temos que $A \subseteq A \cup C$ e $B \subseteq B \cup D$ logo $x \in (A \cup C)$ e $y \in (B \cup D)$ portanto $(x, y) \in (A \times C) \times (B \cup D)$

Caso 2: Se $(x, y) \in (C \times D)$ temos que $x \in C$ e $y \in D$ para quaisquer A e B temos que $C \subseteq A \cup C$ e $D \subseteq B \cup D$ portanto $x \in (A \cup C)$ e $y \in (B \cup D)$ logo $(x, y) \in (A \times C) \times (B \cup D)$ ∎

5ª questão: Paradoxo de Russell

Prova:

Suponha que N é um conjunto. Temos que N é ordinário (normal) ou não é ordinário (anormal)

Caso 1: Suponha que N é ordinário, ou seja, $N \notin N$, como $N = \{A; A \notin A\}$ teríamos que $N \in N$ uma contradição

Caso 2: Suponho que N não é ordinário, ou seja, $N \in N$. Como $N = \{A : A \notin A\}$ teríamos que $N \notin N$. Uma contradição

Em qualquer dos dois casos existe uma contradição. Logo é absurdo supor que N é um conjunto, portanto N não é um conjunto ∎

Prova:

Suponha por contradição que N é conjunto 0,2

Caso 1

caso 2

6ª Questão   Lembrete: $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$

$A = \{x\}$, $B = \{x,y\}$

$A \cup B = \{x,y\}$ 0,2

$A \times B = \{(x,x),(x,y)\}$ 0,2

$P(A\cup B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$ 0,2

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, \{\{y\}\}, \{\{x,y\}\},$

0,3 $\{\emptyset,\{x\}\}, \{\emptyset,\{y\}\}, \{\emptyset,\{x,y\}\}$

$\{\{x\},\{y\}\}, \underbrace{\{\{x\},\{x,y\}\}}_{(x,y)}, \underbrace{\{\{y\},\{x,y\}\}}_{(y,x)}$

$\{\emptyset,\{x\},\{y\}\}, \{\emptyset,\{x\},\{x,y\}\}, \{\emptyset,\{y\},\{x,y\}\}$

$\{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}, \{\emptyset,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}\}$

$B - A = \{y\}$

$A \times (B-A) = \{(x,y)\}$ 0,1

a) $(x,y) \in \mathcal{P}(A\cup B)$ (F) ver $P(A\cup B)$ 0,2
$\{\{x\},\{x,y\}\}$ não é elemento de $P(A\cup B)$

b) $(x,y) \subseteq \mathcal{P}(A\cup B)$ (V) 0,2
$\{\{x\},\{x,y\}\}$ é subconjunto de $P(A\cup B)$

c) $(x,y) = A \times (B-A)$ (F) $\{(x,y)\} = A\times(B-A)$ 0,1 0,2
$(x,y) \neq \{(x,y)\}$

d) $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ (V) 0,2
$\{\{x\},\{x,y\}\}$ é elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$

e) $(y,x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ (F) $(y,x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ 0,2

$(y,x) = \{\{y\}, \underbrace{\{x,y\}}_{\{y,x\}}\}$