Exercícios de Revisão I

1ª a)

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$B = \{0, 24, 48, 72, \ldots, 24n, \ldots\}$

ou

$B = \{0, 24, 48, 72, \ldots\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D = \{\emptyset\}$

$E = \{3, 5\}$

$F = \{0, \emptyset\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \mid 24\}$

$B = \{x \in \mathbb{N};\ 24 \mid x\}$

$C = \{x \in \mathbb{N};\ x \mid 24 \text{ e } 2 \mid x\}$

$D = \{X \in \mathcal{U};\ X = \emptyset\}$

$E = \{x \in \mathbb{Z};\ 1 < x < 6\}$

$F = \{x \in \mathbb{N};\ x = 0\} \cup \{X \subseteq \mathcal{U},\ X = \emptyset\}$

2ª a) Verdadeiro.

Prova.

Seja $x \in A$. Como x é par existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2q$. Como $3 \mid x$ existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $x = 3b$. Logo $2q = 3b$, isto é, $q = \frac{3b}{2}$. Seja $c = b/2 \in \mathbb{N}$, temos que $q = 3c$, substituindo em x obtemos $x = 2q = 2 \cdot 3c = 6c$, isto é, $6 \mid x$. Logo $x \in B$ ∎

2ª b) Falso!

Contra-exemplo:

Considere $2 \in A$. 2 não é múltiplo de 4.

Logo $2 \notin B$. Assim $A \not\subseteq B$

c) Verdadeiro!

Prova:

Seja $x \in A \cup B$.

Caso 1: Se $x \in A$ então existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $y = xc$. multiplicando ambos os lados por z temos que $yz = x(cz)$. Seja $b = cz \in \mathbb{N}$ então $yz = xb$, ou seja $x | yz$. Logo $x \in C$.

Caso 2: Se $x \in B$ então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $z = xq$ multiplicando ambos os lados por y temos que $yz = x(qy)$. Seja $d = qy \in \mathbb{N}$ então $yz = xd$, o que implica que $x | yz$. Logo $x \in C$

Em qualquer caso $x \in C$. ■

d) Verdadeiro!

Prova:

Seja um conjunto A tal que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $\forall x \in A$ temos que $x \in B$ e $x \in C$, o que significa que $x \in B \cap C$. Portanto $A \subseteq B \cap C$. ■

e) Verdadeiro!

Prova.

Seja $x \in \mathcal{U}$. Suponha que $x \in A \cap \bar{A}$, então $x \in A$ e $x \in \bar{A}$, isto é, $x \in A$ e $x \notin A$. Assim chegamos a uma contradição. Portanto $\forall x \in \mathcal{U}$, $x \notin A \cap \bar{A}$, ou seja, $A \cap \bar{A} = \emptyset$. ■

3ª) a) Prova (por indução em n):

Base da Indução: Seja $n = 2$

$$2^2 = 4 > 2+1 = 3$$

Hipótese da Indução: Suponha que para $n = k$ para algum $k \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$ vale

$$k^2 > k+1$$

Passo da Indução: Vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$.

Pelo hipótese de indução temos que

$k^2 > k+1$. Somando $(2k+1)$ em ambos os lados temos

$$\underbrace{k^2 + (2k+1)} > k+1 + (2k+1)$$

$$(k+1)^2 > (k+1) + (1+2k)$$ como $k \geq 2$ temos que $(2k+1) > 1$ Logo

$$(k+1)^2 > (k+1) + 1$$

Conclusão: Portanto para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ temos que $n^2 > n+1$. ■

b)

Prova (por indução forte em n): Seja $n \geq 2$.

Base de indução: Para $n=2$ existe uma decomposição trivial em números primos já que 2 é , ele próprio um número primo.

Hipótese de indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n=2,3,4,...,k$

Passo de indução: Se:: $n=k+1$. Se $k+1$ é um número primo a decomposição é trivial já q.:e $k+1$ é , ele próprio um número primo.

Suponha que $k+1$ não é primo, então existem a e $b \in$ IN tal que $k+1=a.b$ com $a<k+1$ e $b=<k+1$. Pela hipótese de indução a e b podem ser decompostos num produto de números primos e como $k+1=a.b$ então $k+1$ pode ser decomposto num produto de números primos.

Conclusão: Portanto todo número $n \in$ IN, $n \geq 2$ pode ser decomposto num produto de números primos.■

4ª) Na prova a seguir consideraremos que

$A \subseteq B \cup C$ será Hipótese 1 (H1)

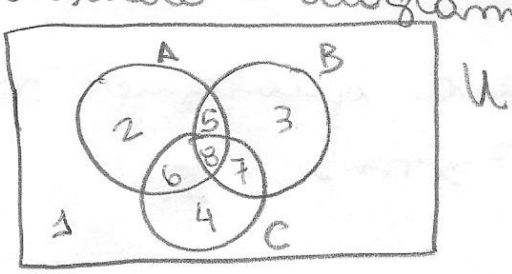
e $A \cap B = \emptyset$ será Hipótese 2 (H2)

Prova:

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap A \quad (P1) \\
&\subseteq A \cap (B \cup C) \quad (H2, P2) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (P4) \\
&= \emptyset \cup (A \cap C) \quad (H2) \\
&= (A \cap C) \cup \emptyset \quad (P5) \\
&= A \cap C \quad (P6) \\
&= C \cap A \quad (P3) \\
&\subseteq C \quad (P7) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

5ª) Prova:

Considere o diagrama numerado abaixo:



$r(A) = 2568$

$r(\overline{B \cup C}) = 12$

$r(A \cap \overline{B \cup C}) = 2$

$r(\overline{B}) = 1246$

$r(A \cap \overline{B}) = 26$

$r(\overline{C}) = 1235$

$r(A \cap \overline{C}) = 25$

$r((A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = 2$

Como $r(A \cap \overline{B \cup C}) = r((A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})) = 2$ temos que $A \cap \overline{B \cup C} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$ $\blacksquare$

6ª Prova:

Suponha, para uma contradição que esta aldeia existe

Caso 1: Se o barbeiro é um homem que não se barbeia sozinho, então ele deve fazer a barba a si mesmo tornando-se um homem que se barbeia sozinho. Contradição!

Caso 2 Se o barbeiro se barbeia sozinho ele não deve fazer a a própria barba, pois ele só faz a barba de quem não se barbeia. Contradição!

Em qualquer dos casos chegamos a uma contradição, portanto tal aldeia não pode existir. ■

7ª Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$. Seja $X \in P(A)$, então $X \subseteq A$ e como $A \subseteq B$ temos por transitividade que $X \subseteq B$. Logo $X \in P(B)$ Desse modo $P(A) \subseteq P(B)$

($\Leftarrow$) Considere $P(A) \subseteq P(B)$. Seja $y \in A$, temos que $\{y\} \subseteq P(A)$, como $P(A) \subseteq P(B)$ por transitividade $\{y\} \subseteq P(B)$, Logo $y \in B$. Desse Modo $A \subseteq B$. ■

8ª) a) Prova:

($\subseteq$) Seja $(x,y) \in A \times (B \cup C)$ então $x \in A$ e $y \in B \cup C$, isto é, $y \in B$ ou $y \in C$. Deste modo $(x,y) \in A \times B$ ou $(x,y) \in A \times C$. Logo $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

($\supseteq$) Seja $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ então $(x,y) \in A \times B$ ou $(x,y) \in A \times C$, ou seja, $x \in A$ e $y \in B$ ou $y \in C$. Assim $(x,y) \in A \times (B \cup C)$. ∎

b) Prova:

($\subseteq$) Seja $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ então $x \in A$ e $y \in B \cap C$, isto é, $y \in B$ e $y \in C$. Assim $(x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C$. Logo $(x,y) \in (A \times B) \cap A \times C$.

($\supseteq$) Seja $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ então $(x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C$, ou seja, $x \in A$ e $y \in B$ e $y \in C$. Assim $(x,y) \in A \times (B \cap C)$. ∎