GABARITO - P1 - A - MATEMÁTICA PARA ECONOMIA 1

(1) (a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = ?$

manipulação algébrica

$$\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}+x}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|}\sqrt{1+1/x^2}+x} \underset{x>0}{\overset{\text{se}}{=}} \frac{1}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)} = \frac{1/x}{\sqrt{1+1/x^2}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1/x}{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+1/x^2}+1)} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x)^{-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+4x+4)} = \sqrt{(2)^2+4.(2)+4}$$

$$= \sqrt{4+8+4} = \sqrt{16} = 4$$

(2) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+9}}$

Assíntotas verticais:

$f(x)$ está definida para todos os reais. Observe que $x^2+16>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(x)$ não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais: Estudar os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+9}} \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+9}}$$

manipulação algébrica:

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+9/x^2}} = \frac{3x}{|x|\cdot\sqrt{1+9/x^2}}$$

Se $x>0$

$$f(x) = \frac{3x}{\underbrace{x}_{|x|=x}\sqrt{1+9/x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+9/x^2}}$$

Se $x<0$

$$f(x) = \frac{3x}{\underbrace{-x}_{|x|=-x}\sqrt{1+9/x^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1+9/x^2}}$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+9/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+9/x^2}} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1+9/x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{1+9/x^2}} = -3$$

Assíntotas horizontais são as retas $y=3$ e $y=-3$

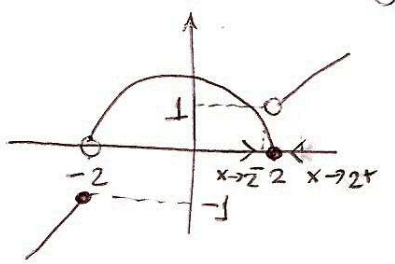
3ª Questão

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = ?$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = ?$

Como $f(x) = g(x) + h(x)$ pelas propriedades dos limites temos:

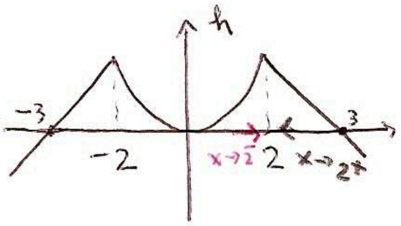
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} g(x) + \lim_{x\to 2^-} h(x)$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) + \lim_{x\to 2^+} h(x)$

Do gráfico de $g(x)$ temos que:



$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$

$$h(x) = \begin{cases} 4x+12, & x \leq -2 \\ x^2, & -2 < x < 2 \\ -4x+12, & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (-4x+12) = -8+12 = 4 \end{array}$$



então

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} g(x) + \lim_{x\to 2^-} h(x) = 0 + 4 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) + \lim_{x\to 2^+} h(x) = 1 + 4 = 5$

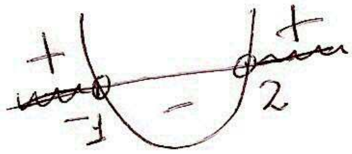
(4) a) $h(x) = \ln(x^2 - x - 2)$

b) $x^2 - x - 2 > 0$

Temos que encontrar as raízes de $g(x) = x^2 - x - 2$ e estudar onde $x^2 - x - 2 > 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

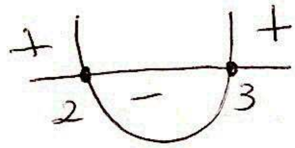


$x^2 - x - 2 > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

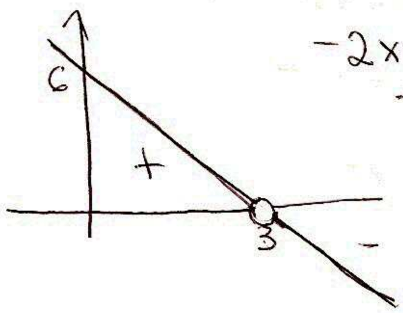
(5) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$



$h(x) = -2x + 6$



$-2x + 6 = 0$

$-2x = -6$

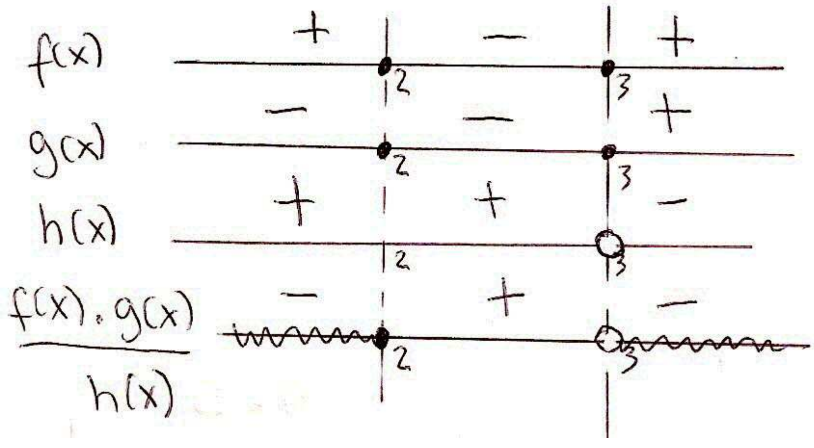
$x = 3$

Para resolver

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} \leq 0$$

Temos que fazer o estudo do sinal das funções envolvidas

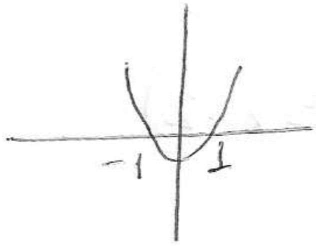
ESTUDO DO SINAL



($h(x) \neq 0$ pois está no denominador)

$S = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$

⑥ $f(x) = x^2 - 1$



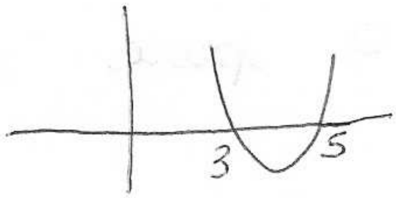
a) $f(x-B)$

$B=4$

$f(x-B) = f(x-4) = (x-4)^2 - 1$

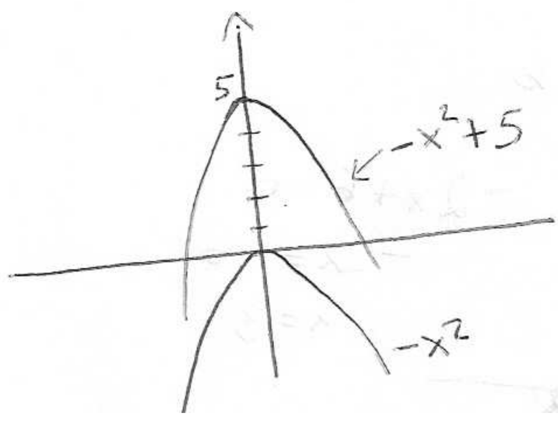
$= x^2 - 8x + 16 - 1 = x^2 - 8x + 15$

$x_1 + x_2 = 8$, $x_1 \cdot x_2 = 15$ $\Rightarrow$ $x_1 = 3$, $x_2 = 5$



b) $-f(x) + B$

$-(x^2 - 1) + 4 = -x^2 + 1 + 4 = -x^2 + 5$



Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática

1ª Prova de Mat. p/ Economia 1 - Tipo A	Turma B1	2011/1	Profª. Ana Maria Luz

Nome:

Matrícula: $\underbrace{4}_{B}$

6ª Questão [1,5 pontos] Seja B=último dígito do seu número de matrícula. A partir do gráfico de $f(x)$ na folha em anexo ($f(x) = x^2 - 1$) esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x - B)$.

b) $-f(x) + B$