Matemática Discreta 2011.2/Álgebra de Conjuntos/Provas Algébricas

Identidades Básicas Envolvendo Conjuntos

Existem muitas igualdades entre conjuntos envolvendo as operações de união, interseção, diferença e complementação que são verdadeiras para todos os subconjuntos de um dado conjunto $\mathcal{U}$. Como elas são independentes dos subconjuntos particulares utilizados, essas igualdades são chamadas identidades básicas envolvendo conjuntos. A seguir listamos algumas dessas identidades básicas:

(1) Associatividade de $\cap$ e de $\cup$:
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(2) Comutatividade de $\cap$ e de $\cup$:
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

(3) Idempotência de $\cap$ e de $\cup$:
$A \cap A = A$
$A \cup A = A$

(4) Elemento neutro de $\cap$ e de $\cup$:
$A \cap \mathcal{U} = A$
$A \cup \emptyset = A$

(5) Elemento zero de $\cap$ e de $\cup$:
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

(6) Distributividade de $\cap$ sobre $\cup$, e de $\cup$ sobre $\cap$:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(7) Involutividade de $\overline{}$:
$\overline{\overline{A}} = A$

(8) Leis de De Morgan:
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(9) Leis de absorção:
$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A$

(10) Definições de $\emptyset$ e $\mathcal{U}$:
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

(11) $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$

(12) $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$

Relembremos outras propriedades básicas da Igualdade (para quaisquer conjuntos A, B, C).

(1) Reflexividade: $A=A$.
(2) Simetria: Se $A=B$ então $B=A$.
(3) Transitividade: Se $A=B$ e $B=C$ então $A=C$.
(4) Substitutividade: Se $A=B$ então se substituirmos qualquer ocorrência de A por uma ocorrência de B em uma expressão, esta continuará sendo verdadeira

Exemplo de (4): Se $A=B$ então $A\cap C=B\cap C$

Relembremos algumas propriedades básicas da inclusão (para quaisquer conjuntos A, B, C).

(1) Reflexividade: $A\subseteq A$.

(2) Antissimetria: Se $A\subseteq B$ e $B\subseteq A$ então $A=B$.

(3) Transitividade: Se $A\subseteq B$ e $B\subseteq C$ então $A\subseteq C$.

(4) $A\cap B\subseteq A$

(5) $A\subseteq A\cup B$