SEGUNDO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO OU PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FORTE

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a n. A justificativa de um raciocínio desse tipo se encontra no:

SEGUNDO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO OU PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FORTE

Seja $P(n)$ uma proposição sobre $A=\{n \in \mathrm{IN};\ n \geq a,\ a\ n \in \mathrm{IN}\}$, o princípio da indução forte pode ser definido como segue:

a) $P(a)$ é verdadeira.
b) Para todo n tal que $a \leq n \leq k$ vale $P(n) \rightarrow P(k+1)$.
c) Então para qualquer $n \in A$, $P(n)$ é verdadeira.

Ou seja, para provar que todo número natural n, pertencente ao conjunto A, tem determinada propriedade, usando a indução forte em n, devemos:

- *Mostrar que $P(a)$ é verdadeira (**base de indução**).*
- *Supor que para todo n tal que $a \leq n \leq k$ vale $P(n)$ (**hipótese de indução**).*
- *Mostrar que $P(k+1)$ usando o fato de que para todo n tal que $a \leq n \leq k$ vale $P(n)$ (**passo de indução**).*

Exemplo 1. Prove que: "*Todo número natural maior ou igual a 2 pode ser decomposto num produto de números primos*".

Prova (por indução forte em n): Seja $n \geq 2$.

Base de indução: Para $n=2$ existe uma decomposição trivial em números primos já que 2 é , ele próprio um número primo.

Hipótese de indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n=2,3,4,\ldots,k$

Passo de indução: Seja $n=k+1$. Se $k+1$ é um número primo a decomposição é trivial já que $k+1$ é , ele próprio um número primo.

Suponha que $k+1$ não é primo, então existem a e $b \in \mathrm{IN}$ tal que $k+1=a.b$ com $a<k+1$ e $b=<k+1$. Pela hipótese de indução a e b podem ser decompostos num produto de números primos e como $k+1=a.b$ então $k+1$ pode ser decomposto num produto de números primos.

Conclusão: Portanto todo número $n \in \mathrm{IN}$, $n \geq 2$ pode ser decomposto num produto de números primos.■

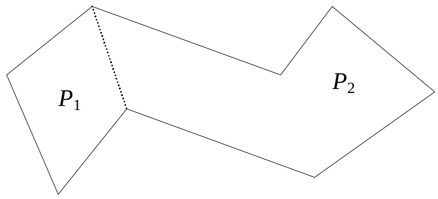
Exemplo 2. Prove que: "*Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.*"

Prova (por indução forte em n): Seja n o número de lados do polígono.

Base de indução: Como este resultado somente tem sentido para $n \geq 4$, vamos verificar que a proposição é verdadeira para $n=4$.

Qualquer quadrilátero só tem 2 diagonais possíveis que se intersectam, então só tem 1 diagonal (1=4-3) que não se intersecta com outra e divide o quadrilátero em dois triângulos justapostos.

Hipótese de indução : Com efeito, suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de $k+1$ lados, ou seja, é verdadeira para $n=4,5,...,k$. Seja então dada uma decomposição do polígono P, de $k+1$ lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < k+1$ e $n_2 < k+1$, logo, pela hipótese de indução, a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2. Evidentemente, $n_1 + n_2 = k+1+ 2$.



As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 – 3$ delas decompõem P_1, $n_2 – 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto $d = n_1 – 3 + n_2 – 3 + 1 = n_1 + n_2 – 5$. Como $n_1 + n_2 = k+1+ 2$, resulta que $d = (k+1) – 3$.

Conclusão: Portanto o resultado é verdadeiro para todo polígono de n lados ($n \geq 4$). ■

Observações:

1. Para habituar-se com o método de demonstração por indução é preciso praticá-lo muitas vezes, a fim de perder aquela vaga sensação de desonestidade que o principiante tem quando admite que o fato a ser provado é verdadeiro para n, antes de demonstrá-lo para $n + 1$.

Exercícios (Primeiro Princípio da Indução**):**

1. Prove por indução que: "*Para qualquer n ϵ IN**, *temos que*

$$1+2+3+...+n=n(n+1)/2".$$

2. Prove por indução que "*Para todos os naturais n, temos que*

$$3^0+3^1+3^2+...+3^n=(3^{n+1}-1)/2".$$

Referências:

Alguns comentários e o exemplo 2 foram adaptados de:

- Lima, Elon Lages. O Princípio da indução. Disponível em:
  http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducao.doc