Estabilidade de um trem de ondas moduladas lentamente sobre um fundo marinho variável

Ana Maria Luz, André Nachbin

PUC- RJ/IMPA

2010

Sumário

Equações para ondas aquáticas:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{xx} + \Phi_{zz} &= 0, \quad -h(x) < z < \eta, \\
g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 &= 0, \quad z = \eta(x,t) \\
\eta_t + \Phi_x \eta_x &= \Phi_z, \quad z = \eta(x,t) \\
h_x \Phi_x + \Phi_z &= 0, \quad z = -h(x).
\end{aligned}
$$

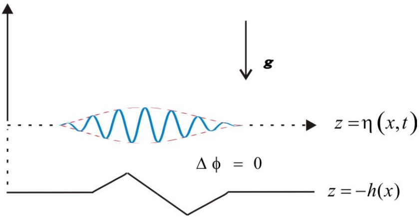


Figura 1: Esboço da região de interesse.

Hipóteses

- $\eta = O(A)$ e que $kA \ll 1$, aqui A é amplitude característica da onda.
- $k\,H = O(1)$

Dado inicial: Trem de ondas

Hipóteses

- $\eta = O(A)$ e que $kA \ll 1$, aqui A é amplitude característica da onda.
- $k\,H = O(1)$

Dado inicial: Trem de ondas

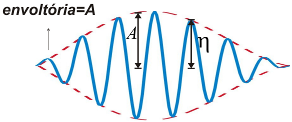


Figura 2: Dado inicial

Representação matemática:

$$\eta(x,0) = A(\varepsilon x, \varepsilon^2 x, \cdots)e^{i\psi},$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$, ψ é a fase da onda $\psi = kx - \omega t$, com k o número de onda e ω a frequência.

Hipóteses

- $\eta = O(A)$ e que $kA \ll 1$, aqui A é amplitude característica da onda.
- $k\,H = O(1)$

Dado inicial: Trem de ondas

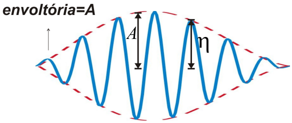


Figura 2: Dado inicial

Representação matemática:

$$\eta(x,0) = A(\varepsilon x, \varepsilon^2 x, \cdots)e^{i\psi},$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$, ψ é a fase da onda $\psi = kx - \omega t$, com k o número de onda e ω a frequência.

Aplicação Conforme

Definiremos a aplicação como segue:

$$\mathfrak{z}(\xi + i\zeta) = x + iz.$$

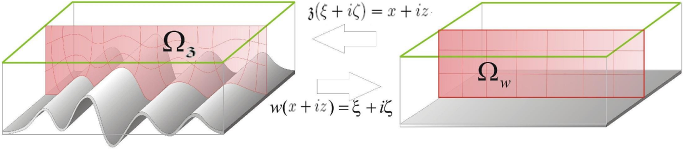


Figura 3: Representação esquemática da aplicação conforme $\mathfrak{z}(w)$ e de sua inversa.

O conjunto de equações para ondas aquáticas escrito no sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, ζ) fica, respectivamente, da forma:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} &= 0, \quad -1 < \zeta < N(\xi, t), \\
|J| N_t + \Phi_\xi N_\xi - \Phi_\zeta &= 0, \quad \zeta = N(\xi, t) \\
|J| \left(g\eta + \Phi_t \right) + \frac{1}{2} |\nabla_{\xi\zeta} \Phi|^2 &= 0, \quad \zeta = N(\xi, t) \\
\Phi_\zeta &= 0, \quad \zeta = -1.
\end{aligned}
$$

Coeficiente da superfície livre

Hamilton (1977), Nachbin (2003) e Artiles Roqueta (2004)

$$|J|(\xi,\zeta) = z_\xi^2 + z_\zeta^2.$$

$$|J|(\xi,\zeta) = M(\xi)^2 + \mathscr{R}_J(\xi,\zeta).$$

com $M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0)$, onde $z(\xi,\zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} + z_{\zeta\zeta} &= 0, \quad (\xi,\zeta) \in \Omega_w \\ z &= 0, \qquad \zeta = 0 \\ z &= -h\left(x(\xi,-1)\right), \qquad \zeta = -1. \end{aligned}$$

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi',-1)\right)}{cosh^2\frac{\pi}{2}\left(\xi-\xi'\right)} d\xi'.$$

Coeficiente da superfície livre

Hamilton (1977), Nachbin (2003) e Artiles Roqueta (2004)

$$|J|(\xi,\zeta) = z_\xi^2 + z_\zeta^2.$$

$$|J|(\xi,\zeta) = M(\xi)^2 + \mathscr{R}_J(\xi,\zeta).$$

com $M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0)$, onde $z(\xi,\zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} + z_{\zeta\zeta} &= 0, \quad (\xi,\zeta) \in \Omega_w \\ z &= 0, \qquad \zeta = 0 \\ z = -h\left(x(\xi,-1)\right), &\qquad \zeta = -1. \end{aligned}$$

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi',-1)\right)}{cosh^2\frac{\pi}{2}\left(\xi-\xi'\right)} d\xi'.$$

Coeficiente da superfície livre

Hamilton (1977), Nachbin (2003) e Artiles Roqueta (2004)

$$|J|(\xi,\zeta) = z_\xi^2 + z_\zeta^2.$$

$$|J|(\xi,\zeta) = M(\xi)^2 + \mathscr{R}_J(\xi,\zeta).$$

com $M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0)$, onde $z(\xi,\zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} + z_{\zeta\zeta} &= 0, \quad (\xi,\zeta) \in \Omega_w \\ z &= 0, \qquad \zeta = 0 \\ z = -h\left(x(\xi,-1)\right), & \qquad \zeta = -1. \end{aligned}$$

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi',-1)\right)}{cosh^2\frac{\pi}{2}\left(\xi-\xi'\right)} d\xi'.$$

Coeficiente da superfície livre

Hamilton (1977), Nachbin (2003) e Artiles Roqueta (2004)

$$|J|(\xi,\zeta) = z_\xi^2 + z_\zeta^2.$$

$$|J|(\xi,\zeta) = M(\xi)^2 + \mathscr{R}_J(\xi,\zeta).$$

com $M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0)$, onde $z(\xi,\zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi} + z_{\zeta\zeta} &= 0, \quad (\xi,\zeta) \in \Omega_w \\ z &= 0, \qquad \zeta = 0 \\ z = -h\left(x(\xi,-1)\right), & \qquad \zeta = -1. \end{aligned}$$

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi,0) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi',-1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi'.$$

Pode-se relacionar a função $N(\xi, t)$, e $\eta(x, t)$ em função do coeficiente livre, $M(\xi)$

$$N(\xi) = \frac{1}{M(\xi)}\eta(\xi, t) + \mathscr{R}(\xi, \zeta).$$

Começamos a análise assintótica pelas condições na superfície livre, consideramos em $\zeta = N(\xi, t)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{|J|M}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \frac{1}{|J|}\frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2\,|J|^2}\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}^2 + \frac{M_\xi}{M|J|}\Phi_\xi\left(-\frac{1}{2|J|}\mathbf{u}^2 - \Phi_t\right) - \frac{gM}{|J|}\Phi_\xi\mathscr{R}_\xi = 0.$$

e

$$g\eta = -\frac{1}{2|J|}\mathbf{u}^2 - \Phi_t,$$

Condições de fronteira na superfície livre $\zeta = N(\xi, t)$

Pode-se relacionar a função $N(\xi, t)$, e $\eta(x, t)$ em função do coeficiente livre, $M(\xi)$

$$N(\xi) = \frac{1}{M(\xi)}\eta(\xi, t) + \mathscr{R}(\xi, \zeta).$$

Começamos a análise assintótica pelas condições na superfície livre, consideramos em $\zeta = N(\xi, t)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{g}{|J|M}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} + \frac{1}{|J|}\frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2\,|J|^2}\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}^2 + \frac{M_\xi}{M|J|}\Phi_\xi\left(-\frac{1}{2|J|}\mathbf{u}^2 - \Phi_t\right) - \frac{gM}{|J|}\Phi_\xi\mathscr{R}_\xi = 0.$$

e

$$g\eta = -\frac{1}{2|J|}\mathbf{u}^2 - \Phi_t,$$

- Considerando $\eta = O(A)$. Faço a expansão de Taylor em torno de $\zeta = 0$ até a terceira ordem $O(kA)^3$
- Introduzimos múltiplas escalas

$$\xi, \quad \xi_1 = \varepsilon\xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2\xi \ldots,$$
$$t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \ldots,$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$.

- Supomos Φ e η como séries de potências em ε:

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n,$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n\left(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; \ldots; \zeta; t, t_1, t_2, \ldots\right), \\ \eta_n &= \eta_n\left(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; t, t_1, t_2, \ldots\right), \end{aligned}$$

- Considerando $\eta = O(A)$. Faço a expansão de Taylor em torno de $\zeta = 0$ até a terceira ordem $O(kA)^3$
- Introduzimos múltiplas escalas

$$\begin{aligned} &\xi, \quad \xi_1 = \varepsilon\xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2\xi \ldots, \\ &t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \ldots, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$.

- Supomos Φ e η como séries de potências em ε:

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n,$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; \ldots; \zeta; t, t_1, t_2, \ldots), \\ \eta_n &= \eta_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; t, t_1, t_2, \ldots), \end{aligned}$$

- Considerando $\eta = O(A)$. Faço a expansão de Taylor em torno de $\zeta = 0$ até a terceira ordem $O(kA)^3$
- Introduzimos múltiplas escalas

$$\begin{array}{lll} \xi, & \xi_1 = \varepsilon\xi, & \xi_2 = \varepsilon^2\xi \ldots, \\ t, & t_1 = \varepsilon t, & t_2 = \varepsilon^2 t \ldots, \end{array}$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$.

- Supomos Φ e η como séries de potências em ε:

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n,$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n\left(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; \ldots; \zeta; t, t_1, t_2, \ldots\right), \\ \eta_n &= \eta_n\left(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots; t, t_1, t_2, \ldots\right), \end{aligned}$$

Substituindo as séries de potências obtemos uma família de problemas lineares para ϕ_n. Precisamos aprender como lidar com o coeficiente $M(\xi)$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\phi_n &= F_n, \quad -1 < \zeta < 0, \\
\mathcal{L}\phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{M}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi_n &= \widetilde{G_n}, \quad \zeta = 0, \\
\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} &= 0, \quad \zeta = -1.
\end{aligned}
$$

Recuperamos η_n de:

$$
-g\eta_n = \widetilde{H_n}, \quad \zeta = 0,
$$

Como lidar com o coeficiente $M(\xi)$?

- Suponha que a função que descreve a topografia do solo marinho é da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L, \\ 1; & x \leq -L \text{ ou } x \geq L. \end{cases}$$

- $n(x)$ pode ter amplitude grande e ser descontínua.
- Quando $h(x)$ é escrita desta forma, o coeficiente da superfície livre (termo métrico) tem a forma:

$$M(\xi) \equiv z_\varsigma(\xi, 0) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi' = 1 + m(\xi)$$

$$m(\xi) = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi'.$$

Como lidar com o coeficiente $M(\xi)$?

- Suponha que a função que descreve a topografia do solo marinho é da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L, \\ 1; & x \leq -L \text{ ou } x \geq L. \end{cases}$$

- $n(x)$ pode ter amplitude grande e ser descontínua.
- Quando $h(x)$ é escrita desta forma, o coeficiente da superfície livre (termo métrico) tem a forma:

$$M(\xi) \equiv z_\varsigma(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi' = 1 + m(\xi)$$

$$m(\xi) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi'.$$

Como lidar com o coeficiente $M(\xi)$?

- Suponha que a função que descreve a topografia do solo marinho é da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L, \\ 1; & x \leq -L \text{ ou } x \geq L. \end{cases}$$

- $n(x)$ pode ter amplitude grande e ser descontínua.
- Quando $h(x)$ é escrita desta forma, o coeficiente da superfície livre (termo métrico) tem a forma:

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi' = 1 + m(\xi)$$

$$m(\xi) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi'.$$

Como lidar com o coeficiente $M(\xi)$?

- Suponha que a função que descreve a topografia do solo marinho é da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L, \\ 1; & x \leq -L \text{ ou } x \geq L. \end{cases}$$

- $n(x)$ pode ter amplitude grande e ser descontínua.
- Quando $h(x)$ é escrita desta forma, o coeficiente da superfície livre (termo métrico) tem a forma:

$$M(\xi) \equiv z_\zeta(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi' = 1 + m(\xi)$$

$$m(\xi) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\left(x(\xi', -1)\right)}{cosh^2 \frac{\pi}{2}\left(\xi - \xi'\right)} d\xi'.$$

Adotamos a seguinte representação:

$$M(\xi) = a + \varepsilon\, m'(\xi),$$

que considera os casos de topografias com flutuações de grande amplitude. Temos que a representa a profundidade efetiva que vai ser "sentida" na superfície livre e $\langle m'(\xi)\rangle = 0$. De fato $a = 1 - \delta$, com $0 < \delta < 1$, isto é, $a < 1$.

O "ansatz" desta representação de $M(\xi)$ está baseado na expressão de $h(x)$, de modo que:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 1 + m(\xi) \\ &= 1 + \langle m(\xi)\rangle + \varepsilon m'(\xi) \\ &= \underbrace{1 + \langle m(\xi)\rangle}_{a} + \varepsilon m'(\xi). \end{aligned}$$

Adotamos a seguinte representação:

$$M(\xi) = a + \varepsilon\, m'(\xi),$$

que considera os casos de topografias com flutuações de grande amplitude. Temos que a representa a profundidade efetiva que vai ser "sentida" na superfície livre e $\langle m'(\xi)\rangle = 0$. De fato $a = 1 - \delta$, com $0 < \delta < 1$, isto é, $a < 1$.

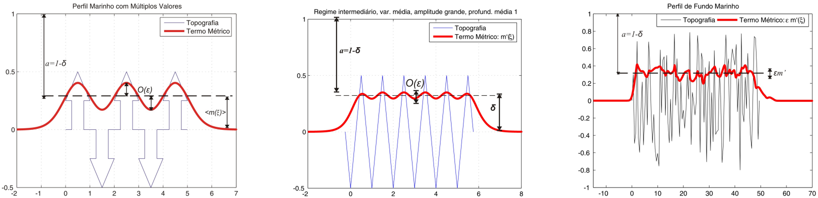
O "ansatz" desta representação de $M(\xi)$ está baseado na expressão de $h(x)$, de modo que:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 1 + m(\xi) \\ &= 1 + \langle m(\xi)\rangle + \varepsilon m'(\xi) \\ &= \underbrace{1 + \langle m(\xi)\rangle}_{a} + \varepsilon m'(\xi). \end{aligned}$$

Adotamos a seguinte representação:

$$M(\xi) = a + \varepsilon\, m'(\xi),$$

que considera os casos de topografias com flutuações de grande amplitude. Temos que a representa a profundidade efetiva que vai ser "sentida" na superfície livre e $\langle m'(\xi)\rangle = 0$. De fato $a = 1 - \delta$, com $0 < \delta < 1$, isto é, $a < 1$.



(a) Perfil com múltiplos valores

(b) Caso periódico

(c) Caso aleatório

Figura 4: Exemplo de topografias

Quando escrevemos $M(\xi) = a + \varepsilon\, m'(\xi)$ e substituimos nas equações em coordenadas curvilíneas em vez de obtermos:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\phi_n &= F_n, \quad -1 < \zeta < 0, \\
\mathcal{L}\phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{M}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi_n &= \widetilde{G_n}, \quad \zeta = 0, \\
\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} &= 0, \quad \zeta = -1.
\end{aligned}
$$

Recuperamos η_n de:

$$-g\eta_n = \widetilde{H_n}, \quad \zeta = 0,$$

Quando escrevemos $M(\xi) = a + \varepsilon\, m'(\xi)$ e substituimos nas equações em coordenadas curvilíneas nós obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\phi_n &= F_n, \quad -1 < \zeta < 0, \\
\mathcal{L}_a \phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi_n &= G_n, \quad \zeta = 0, \\
\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} &= 0, \quad \zeta = -1.
\end{aligned}
$$

Recuperamos η_n de:

$$
-g\eta_n = H_n, \quad \zeta = 0,
$$

Nos problemas acimas temos que

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -2\phi_{1_{\xi\xi_1}}, \quad F_3 = -\left[\phi_{1_{\xi_1\xi_1}} + 2\phi_{1_{\xi\xi_2}} + 2\phi_{2_{\xi\xi_1}}\right];$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -\left[\eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta}\phi_1 + \frac{1}{a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_t + 2\phi_{1_{tt_1}}\right] + g\frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{1_\zeta},$$

Nos problemas acimas temos que

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -2\phi_{1_{\xi\xi_1}}, \quad F_3 = -\left[\phi_{1_{\xi_1\xi_1}} + 2\phi_{1_{\xi\xi_2}} + 2\phi_{2_{\xi\xi_1}}\right];$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -\left[\eta_1 \mathcal{L}_a \zeta\phi_1 + \frac{1}{a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_t + 2\phi_{1_{tt_1}}\right] + g\frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{1_\zeta},$$

$$
\begin{aligned}
G_3 = -\Bigg[& \eta_2 \mathcal{L}_{a\zeta}\phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta}\phi_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 \mathcal{L}_{a\zeta\zeta}\phi_1 + \frac{2}{a^2}\left(\phi_{1_\xi}\phi_{2_\xi} + \phi_{1_\zeta}\phi_{2_\zeta}\right)_t + \\
& + \eta_1\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_{t\zeta} + \frac{1}{2a^4}\left(\phi_{1_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \phi_{1_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right) \\
& + 2\phi_{2_{tt_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\zeta}\phi_{1_{\zeta t_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi_1}}\phi_{1_{\xi t}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\xi}\phi_{1_{\xi t_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\xi}\phi_{1_{t\xi_1}} + \\
& + 2\eta_1\phi_{1_{\zeta tt_1}} + 2\phi_{1_{tt_2}} + \phi_{1_{t_1 t_1}}\Bigg] + \eta_1 g\frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{1_{\zeta\zeta}} + g\frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{2_\zeta} - \\
& - g\frac{m'(\xi)^2}{a^3}\phi_{1_\zeta} + 2\frac{m'(\xi)}{a^3}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_t + \frac{m'_\xi(\xi)}{a^3}\phi_{1\xi}\phi_{1t},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_3 = -\Bigg[& \eta_2 \mathcal{L}_{a\zeta}\phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_{a\zeta}\phi_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 \mathcal{L}_{a\zeta\zeta}\phi_1 + \frac{2}{a^2}\left(\phi_{1_\xi}\phi_{2_\xi} + \phi_{1_\zeta}\phi_{2_\zeta}\right)_t + \\
& + \eta_1 \left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_{t\zeta} + \frac{1}{2a^4}\left(\phi_{1_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \phi_{1_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right) \\
& + 2\phi_{2_{tt_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\zeta}\phi_{1_{\zeta t_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi_1}}\phi_{1_{\xi t}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\xi}\phi_{1_{\xi t_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_\xi}\phi_{1_{t\xi_1}} + \\
& + 2\eta_1\phi_{1_{\zeta t t_1}} + 2\phi_{1_{tt_2}} + \phi_{1_{t_1 t_1}} \Bigg] + \eta_1 g \frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{1_{\zeta\zeta}} + g\frac{m'(\xi)}{a^2}\phi_{2_\zeta} - \\
& - g\frac{m'(\xi)^2}{a^3}\phi_{1_\zeta} + 2\frac{m'(\xi)}{a^3}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_t + \frac{m'_\xi(\xi)}{a^3}\phi_{1\xi}\phi_{1t},
\end{aligned}
$$

$$H_1 = \phi_{1_t}, \quad H_2 = \phi_{2_t} + \tfrac{1}{2a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right) + \phi_{1_{t_1}} + \eta_1 \phi_{1_{\zeta t}},$$

$$\begin{aligned} H_3 = {} & \phi_{3_t} + \phi_{1_\xi}\phi_{2_\xi} + \phi_{1_\zeta}\phi_{2_\zeta} + \eta_1\phi_{2_{\zeta t}} + \eta_2\phi_{1_{\zeta t}} + \\ & + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1_{\zeta\zeta t}} + \frac{\eta_1}{2a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_\zeta + \phi_{2_{t_1}} \\ & + \phi_{1_\xi}\phi_{1_{\xi_1}} + \phi_{1_{t_2}} + \eta_1\phi_{1_{\zeta t_1}} - \frac{m'(\xi)}{a^3}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right). \end{aligned}$$

$$H_1 = \phi_{1_t}, \quad H_2 = \phi_{2_t} + \tfrac{1}{2a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right) + \phi_{1_{t_1}} + \eta_1 \phi_{1_{\zeta t}},$$

$$\begin{aligned} H_3 = {} & \phi_{3_t} + \phi_{1_\xi}\phi_{2_\xi} + \phi_{1_\zeta}\phi_{2_\zeta} + \eta_1 \phi_{2_{\zeta t}} + \eta_2 \phi_{1_{\zeta t}} + \\ & + \frac{1}{2}\eta_1^2 \phi_{1_{\zeta\zeta t}} + \frac{\eta_1}{2a^2}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right)_\zeta + \phi_{2_{t_1}} \\ & + \phi_{1_\xi}\phi_{1_{\xi_1}} + \phi_{1_{t_2}} + \eta_1 \phi_{1_{\zeta t_1}} - \frac{m'(\xi)}{a^3}\left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2\right). \end{aligned}$$

Seja $\langle \ldots \rangle$ a média no sentido probabilístico e $(\ldots)'$ a pertubação desta componente.Usando a linearidade dos subproblemas, as soluções são expressas por:

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi_n', \quad \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta_n', \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F_n', \quad G_n = \langle G_n \rangle + G_n', \quad H_n = \langle H_n \rangle + H_n'.$$

Na parte de análise assintótica supomos que o termo métrico $m'(\xi)$ é um processo aleatório estacionário, com ergodicidade e que sua função de correlação vai para zero no infinito. Consideraremos ainda $\langle n(x) \rangle = 0$ e $\langle m'(\xi) \rangle = 0$.

Seja $\langle \ldots \rangle$ a média no sentido probabilístico e $(\ldots)'$ a pertubação desta componente.Usando a linearidade dos subproblemas, as soluções são expressas por:

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi_n', \quad \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta_n', \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F_n', \quad G_n = \langle G_n \rangle + G_n', \quad H_n = \langle H_n \rangle + H_n'.$$

Na parte de análise assintótica supomos que o termo métrico $m'(\xi)$ é um processo aleatório estacionário, com ergodicidade e que sua função de correlação vai para zero no infinito. Consideraremos ainda $\langle n(x) \rangle = 0$ e $\langle m'(\xi) \rangle = 0$.

Seja $\langle \ldots \rangle$ a média no sentido probabilístico e $(\ldots)'$ a pertubação desta componente.Usando a linearidade dos subproblemas, as soluções são expressas por:

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi_n', \quad \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta_n', \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F_n', \quad G_n = \langle G_n \rangle + G_n', \quad H_n = \langle H_n \rangle + H_n'.$$

Na parte de análise assintótica supomos que o termo métrico $m'(\xi)$ é um processo aleatório estacionário, com ergodicidade e que sua função de correlação vai para zero no infinito. Consideraremos ainda $\langle n(x) \rangle = 0$ e $\langle m'(\xi) \rangle = 0$.

Se em todas as ordens procurarmos soluções (tanto para a parte determinística, quanto para a aleatória), como séries envolvendo modos de Fourier da forma

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^{n} e^{im\psi} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\}. \quad (1)$$

Obteremos a seguinte família de subproblemas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2\right) \phi_{nm} = F_{nm}, \quad -h < z < 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2\right) \phi_{nm} = G_{nm}, \quad z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi_{nm} = 0, \quad z = -h. \quad (4)$$

Se em todas as ordens procurarmos soluções (tanto para a parte determinística, quanto para a aleatória), como séries envolvendo modos de Fourier da forma

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^{n} e^{im\psi} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\} . \tag{1}$$

Obteremos a seguinte família de subproblemas

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2\right) \phi_{nm} &= F_{nm}, \quad -h < z < 0, && (2)\\
\left(\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2\right) \phi_{nm} &= G_{nm}, \quad z = 0, && (3)\\
\frac{\partial}{\partial z}\phi_{nm} &= 0, \quad z = -h. && (4)
\end{aligned}$$

Forma Clássica da SNL com Termo de Amortecimento

A equação de Schrödinger surge a partir da condição de compatibilidade dos problemas de valor de contorno em terceira ordem para parte determinística. Depois de muitas contas obtemos:

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0, \quad \text{onde} \quad \Theta = \frac{\widehat{\beta}_{ai}}{\omega}\left(\frac{\sigma_0}{A_0}\right)^2$$

sendo σ_0 o desvio padrão da pertubação no coeficiente da superfície livre e $\widehat{\beta}_{ai}$ depende da correlação de $m'(\xi)$, de fato temos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{ai} &= \frac{\tilde{\beta}_{ai}}{(k\,\sigma)^2} \qquad \text{onde} \\
\tilde{\beta}_a &= \left(\beta_a - \frac{\omega}{2a^2}\langle m'(\xi)^2\rangle\right), \text{com} \\
\beta_a &= \frac{gk \sinh q}{2\omega\, a^3 \cosh q}\int_{-\infty}^{\infty}\langle m'(\xi)m'(\xi')\rangle e^{-ikr}\mathcal{G}_\zeta(|r|,0)\,dr, \\
\mathcal{G}(|r|,0)_\zeta &= ie^{ik|r|}\frac{k\sinh^2 k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + \sum_n e^{-k_n|r|}\frac{k_n \sin^2 k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}.
\end{aligned}$$

Forma Clássica da SNL com Termo de Amortecimento

A equação de Schrödinger surge a partir da condição de compatibilidade dos problemas de valor de contorno em terceira ordem para parte determinística. Depois de muitas contas obtemos:

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0, \quad \text{onde} \quad \Theta = \frac{\widehat{\beta}_{a\,i}}{\omega}\left(\frac{\sigma_0}{A_0}\right)^2$$

sendo σ_0 o desvio padrão da pertubação no coeficiente da superfície livre e $\widehat{\beta}_{a\,i}$ depende da correlação de $m'(\xi)$, de fato temos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{a\,i} &= \frac{\tilde{\beta}_{a\,i}}{(k\,\sigma)^2} \qquad \text{onde} \\
\tilde{\beta}_a &= \left(\beta_a - \frac{\omega}{2a^2}\langle m'(\xi)^2\rangle\right), \text{com} \\
\beta_a &= \frac{gk\sinh q}{2\omega\, a^3\cosh q}\int_{-\infty}^{\infty}\langle m'(\xi)m'(\xi')\rangle e^{-ikr}\mathcal{G}_\zeta\left(|r|,0\right)dr, \\
\mathcal{G}(|r|,0)_\zeta &= ie^{ik|r|}\frac{k\sinh^2 k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + \sum_n e^{-k_n|r|}\frac{k_n\sin^2 k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}.
\end{aligned}$$

Forma Clássica da SNL com Termo de Amortecimento

A equação de Schrödinger surge a partir da condição de compatibilidade dos problemas de valor de contorno em terceira ordem para parte determinística. Depois de muitas contas obtemos:

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0, \quad \text{onde} \quad \Theta = \frac{\widehat{\beta}_{a\,i}}{\omega}\left(\frac{\sigma_0}{A_0}\right)^2$$

sendo σ_0 o desvio padrão da pertubação no coeficiente da superfície livre e $\widehat{\beta}_{a\,i}$ depende da correlação de $m'(\xi)$, de fato temos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{a\,i} &= \frac{\tilde{\beta}_{a\,i}}{(k\,\sigma)^2} \qquad \text{onde} \\
\tilde{\beta}_a &= \left(\beta_a - \frac{\omega}{2a^2}\langle m'(\xi)^2\rangle\right), \text{com} \\
\beta_a &= \frac{gk\sinh q}{2\omega\, a^3\cosh q}\int_{-\infty}^{\infty}\langle m'(\xi)m'(\xi')\rangle e^{-ikr}\mathcal{G}_\zeta\left(|r|,0\right)dr, \\
\mathcal{G}(|r|,0)_\zeta &= ie^{ik|r|}\frac{k\sinh^2 k}{\sinh^2 k + \frac{a\omega^2}{g}} + \sum_n e^{-k_n|r|}\frac{k_n\sin^2 k_n}{\frac{a\omega^2}{g} - \sin^2 k_n}.
\end{aligned}$$

Forma Clássica da SNL com Termo de Amortecimento

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0,$$

com α_1 e α_2 dados por:

$$\alpha_1 = -\frac{k^2}{2\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \text{onde} \quad \omega^2 = \frac{gk}{a}\tanh q$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega\, k^2}{16\sinh^4 q}\Big\{(6a^2+2)\cosh^4 q + (37-45a^2)\cosh^2 q + 1 + (36a^2-28) - 2\tanh^2 q\Big\} - \frac{\left(a\,\widetilde{C_g}/c_p + 2\cosh^2 q\right)^2}{2\,a\sinh^2 2q\left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C_g}^2}{c_p}\right)} - \frac{\left(a\,\widetilde{C_g}/c_p + 2\cosh^2 q\right)(\Upsilon)}{2\,a^2\sinh^2 2q\left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C_g}^2}{c_p}\right)}.$$

Veja que α_1 e α_2 dependem de a, que representa a profundidade efetiva e assim sendo dependem de $\langle m \rangle$.

Forma Clássica da SNL com Termo de Amortecimento

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0,$$

com α_1 e α_2 dados por:

$$\alpha_1 = -\frac{k^2}{2\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \text{onde} \quad \omega^2 = \frac{gk}{a}\tanh q$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega\, k^2}{16\,\sinh^4 q}\Big\{(6a^2+2)\cosh^4 q + (37-45a^2)\cosh^2 q + 1 + (36a^2-28) - 2\tanh^2 q\Big\} - \frac{\left(a\,\widetilde{C_g}/c_p + 2\cosh^2 q\right)^2}{2\,a\sinh^2 2q\left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C_g}^2}{c_p}\right)} - \frac{\left(a\,\widetilde{C_g}/c_p + 2\cosh^2 q\right)(\Upsilon)}{2\,a^2\sinh^2 2q\left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C_g}^2}{c_p}\right)}.$$

Veja que α_1 e α_2 dependem de a, que representa a profundidade efetiva e assim sendo dependem de $\langle m \rangle$.

Considere a SNL da forma:

$$-i\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B = 0,$$

Para esta equação fizemos um estudo de estabilidade de Onda de Stokes relacionando estabilidade com efeito da topografia. Fazemos o seguinte "ansatz" para as ondas de Stokes:

$$B = B_0\, e^{i(K\chi - \Omega\tau)},$$

uma vez que Ω satisfaça a relação de dispersão:

$$\Omega = \alpha_2 |B_0|^2 - \alpha_1 K^2.$$

Aqui, α_1 e α_2 são funções de k (> 0), o número de onda da onda portadora η_1; $K(> 0)$ é o número de onda da modulação. Se escolhermos o número de onda desta solução como sendo unicamente k, então fazemos $K = 0$.

Para estudarmos questões de estabilidade, consideramos uma pertubação da onda de Stokes

$$B = B_0\,(1 + \Delta b)\, e^{i(-\Omega\tau + \Delta\theta)},$$

onde $b = b(\chi, \tau)$, $\theta(\chi, \tau)$ (ambas tidas como funções reais), Δ um parâmetro pequeno. Lembrando que $K = 0$ temos que a relação de dispersão é dada por

$$\Omega = \alpha_2 |B_0|^2.$$

Substituindo na equação SNL obtem-se

$$-(b_\tau + i\theta_\tau - ib\Omega) + \alpha_1(b_{\chi\chi} + i\theta_{\chi\chi}) + 3\alpha_2|B_0|^2 b = 0.$$

Visto que b e θ são funções reais e usando novamente a relação $\Omega = \alpha_2|B_0|^2$ para eliminar Ω na equação acima, temos que:

$$\begin{aligned} \theta_\tau + \alpha_1 b_{\chi\chi} + 2\alpha_2|B_0|^2 b &= 0; \\ -b_\tau + \alpha_1 \theta_{\chi\chi} &= 0. \end{aligned}$$

Como as equações acima são lineares com coeficientes constantes vamos procurar uma solução da forma:

$$\begin{pmatrix} b \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_o \\ \theta_o \end{pmatrix} e^{i(\kappa\chi - \mu\tau)} + *, \tag{5}$$

onde b_o, θ_o, κ (> 0) e μ são constantes. Esta solução existe desde que

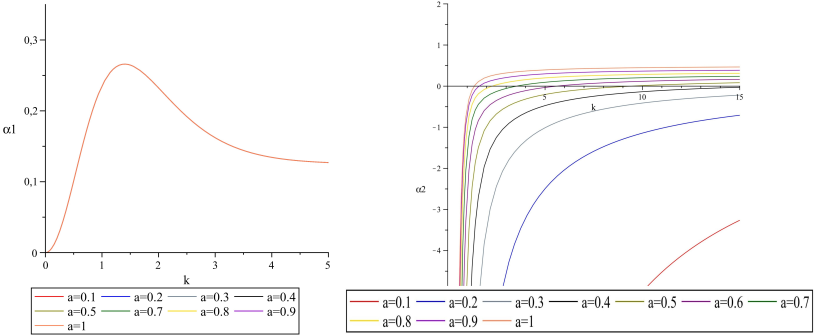
$$\begin{vmatrix} i\mu & -\kappa^2\alpha_1 \\ -\alpha_1\kappa^2 + 2|B_0|^2\alpha_2 & -i\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = (\alpha_1\kappa)^2(\kappa^2 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}|B_0|^2). \tag{6}$$

$\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$	(μ é real) estável	“defocusing”
$\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$	(μ é imaginário) instável	“focusing” (SNL+)

Tabela 1: Critério de estabilidade

Temos que o coeficiente α_1 é positivo para todo $k > 0$, e independe de a. Porém, para um valor de a fixo, α_2 muda de sinal para um determinado valor de k. Veja os gráficos abaixo

Temos que o coeficiente α_1 é positivo para todo $k > 0$, e independe de a. Porém, para um valor de a fixo, α_2 muda de sinal para um determinado valor de k. Veja os gráficos abaixo



(a) Gráfico de $\alpha_1 \times k$

(b) Gráfico de $\alpha_2 \times k$

Figura 5:

A tabela abaixo mostra os valores aproximados deste valor crítico (k_0) onde o coeficiente α_2 muda de sinal.

a	$k_0 \approx$
1	1.363
0.9	1.609
0.8	2.272
0.7	3.528
0.6	5.592
0.5	9.393
0.4	17.142
0.3	35.245
0.2	89.536
0.1	388.6

Tabela 2: Valores de k onde α_2 muda de sinal

Os coeficiente α_2 contém a informação estatística da topografia através do parâmetro *a* (lembramos que *a* está relacionado com o valor de $\langle m(\xi) \rangle$).

$$\Downarrow$$

À medida que diminuimos a profundidade efetiva *a*, ou seja aumentando a amplitude das flutuações da topografia, regularizamos a solução: números de onda que eram instáveis passam a ser estáveis, porque $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$.

$$\Downarrow$$

Em outras palavras, conforme a topografia flutua mais, a equação passa a ser "*defocusing*" em regiões onde antes era "*focusing*".

Os coeficiente α_2 contém a informação estatística da topografia através do parâmetro *a* (lembramos que *a* está relacionado com o valor de $\langle m(\xi) \rangle$).

$$\Downarrow$$

À medida que diminuimos a profundidade efetiva *a*, ou seja aumentando a amplitude das flutuações da topografia, regularizamos a solução: números de onda que eram instáveis passam a ser estáveis, porque $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$.

$$\Downarrow$$

Em outras palavras, conforme a topografia flutua mais, a equação passa a ser "*defocusing*" em regiões onde antes era "*focusing*".

Os coeficiente α_2 contém a informação estatística da topografia através do parâmetro *a* (lembramos que *a* está relacionado com o valor de $\langle m(\xi)\rangle$).

$$\Downarrow$$

À medida que diminuimos a profundidade efetiva *a*, ou seja aumentando a amplitude das flutuações da topografia, regularizamos a solução: números de onda que eram instáveis passam a ser estáveis, porque $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$.

$$\Downarrow$$

Em outras palavras, conforme a topografia flutua mais, a equação passa a ser "*defocusing*" em regiões onde antes era "*focusing*".

Referências Bibliográficas

- Artiles Roqueta, W. *Modelagem de ondas n ao lineares através do operador Dirichlet-to-Neumann*. PhD thesis, IMPA, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Orientador: Nachbin, A.
- Johnson, R. S. *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*. Cambridge University Press, 1997.
- Luz, A. M. S. *Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável*. Orientador: Nachbin, A.Tese de Doutorado. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.
- Mei, CC. *Applied dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific, 1989.
- Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley, New York, 1982.

Referências Bibliográficas

- Hamilton, J. Differential equations for long-period gravity waves on a fluid of rapidly varying depth. *J. Fluid Mech.*, 83, pp. 289-310, 1977.
- Luz, A. M. S., NACHBIN, A. Modelagem de trem de ondas em regiões costeiras, 2008. Congresso Rio Oil and Gas, Apresentação de Trabalho.
- Luz, A. M. S., NACHBIN, A. Equações de evolução para um trem de ondas sobre um fundo, 2007. Congresso 4PDPETRO ,Apresentação de Trabalho.
- Luz, A. M. S., NACHBIN, A. Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável, 2009. Submetido para o Congresso 5PDPETRO, Apresentação de Trabalho.

Referências Bibliográficas

Nachbin, A.*A terrain-following Boussinesq system*. SIAM J. Appl. Math. V.63, p.905-922, 2003.

Mei, CC; Hancock, M. J. *Weakly nonlinear surface waves over a random seabed*. J. Fluid Mech. v.475, p.247-268, 2003.

Pihl J. H.; Mei C. C.; Hancock, M. J. *Surface gravity waves over a two-dimensional random seabed*, Physical review E 66, 016611, 2002.