Roteiro para Esboçar uma Curva

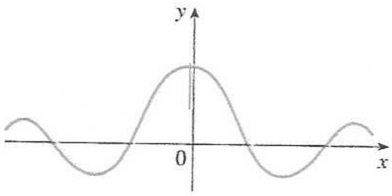
A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma dada curva pode não ter assíntotas ou não possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É freqüentemente proveitoso começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

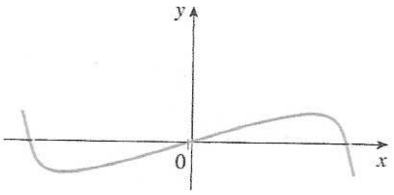
B. Interceptos O intercepto y é $f(0)$ e nos diz onde a curva intercepta o eixo y. Para achar o intercepto x, fazemos $y = 0$ e resolvemos para x. (Você pode omitir esta etapa se a equação for difícil de resolver.) ACHAR RAÍZES DE $f(x)=0$.

C. Simetria

(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geq 0$, então somente precisaremos refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 6(a)]. Alguns exemplos disso são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.



(a) Função par; simetria reflexional



(b) Função ímpar: simetria rotacional

FIGURA 6

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar**, e a curva é simétrica em relação à origem. Novamente podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geq 0$. [Girando 180° em torno da origem; veja a Figura 6(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, em que p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é denominado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ possui um período de 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico no intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se da Seção 2.6 que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$.

Se resultar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, mas esta é uma informação proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se da Seção 2.2 que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para as outras funções esse método não é aplicável.) Além disso, ao esboçar a curva é muito proveitoso saber exatamente qual das afirmativas em (1) é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for um extremo do domínio de f, então você deve computar $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, se esse limite for infinito ou não.

(iii) *Assíntotas inclinadas*: VER PÁGINA 322

E. Intervalos de Crescimento e Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais ela é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximo e Mínimo Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Derivada Primeira. Se f' mudar de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é o máximo local. Se f' mudar de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Embora seja geralmente preferível o Teste da Derivada Primeira, você pode usar o Teste da Derivada Segunda se c for um número crítico no qual $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ seja um mínimo local, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Ponto de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque os interceptos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se uma precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá computar o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

FONTE: STEWART, JAMES, CÁLCULO, VOLUME I - 5ª ed. SÃO PAULO: THOMSON LEARNING, 2008