

Lista de Exercícios 5 – Espaços Vetoriais – Parte I

GABARITO

2) a) V b) F c) V d) V e) F f) V g) F h) V i) V j) F k) F

3) L.I. 4) a) não b) sim c) não d) não

5) $B = \{(1,1,0), (2,0,1)\}$ é uma base e $\dim S = 2$.

6) Para qual valor de k será o vetor $u = (1, -2, k)$ em \mathfrak{R}^3 uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

Solução. Faça $u = a(3, 0, -2) + b(2, -1, -5) = (3a + 2b, -b, -2a - 5b)$

Forme o sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -b = -2 \\ -2a - 5b = k \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, $a = -1$ e $b = 2$. Substitua na última equação para obter $k = -8$.

7) Determine m para que o conjunto $\{(2, -3, 2m), (1, 0, m + 4), (-1, 3, m - 2)\}$ seja L.I.

Solução 1.

Considere a equação

$x(2, -3, 2m) + y(1, 0, m + 4) + z(-1, 3, m - 2) = (0, 0, 0)$. Daí, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 2mx + (m + 4)y + (m - 2)z = 0 \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, $z = x$ e $y = -x$.

Substitua na última equação: $x[2m - (m + 4) + m - 2] = 0$. Para que o conjunto seja L.I, $2m - (m + 4) + m - 2 = 2m - 6$ tem que ser diferente de zero, ou seja $m \neq 3$.

Solução 2.

Para que o conjunto dado seja L.I, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2m & m + 4 & m - 2 \end{bmatrix} \quad \text{tem que ser não nulo.}$$

Mas o $\det A = 6m - 18$. Logo, $m \neq 3$.

- 8) Expresse o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathfrak{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

Solução.

Temos que encontrar escalares α, β, γ tal que

$$(-1, 4, -4, 6) = \alpha(3, -3, 1, 0) + \beta(0, 1, -1, 2) + \gamma(1, -1, 0, 0).$$

O que equivale resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = -1 \\ -3\alpha + \beta - \gamma = 4 \\ \alpha - \beta = -4 \\ 2\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}.$$

Logo, $u = -v_1 + 3v_2 + 2v_3$.

- 9) Determine os subespaços do \mathfrak{R}^3 gerados pelos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{(2, -1, 3)\}$

(b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$

(c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

Solução.

(a) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A .

Então, $(a, b, c) = x(2, -1, 3)$

Daí,

$$\begin{cases} 2x = a \\ -x = b \\ 3x = c \end{cases}$$

Logo, $S = \{(a, b, c) \in \mathfrak{R}^3 / a = -2b \text{ e } c = -3b\} = \{(-2b, b, -3b) / b \in \mathfrak{R}\}$.

(b) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A .

Então, $(a, b, c) = x(-1, 3, 2) + y(2, -2, 1)$

Daí,

$$\begin{cases} -x + 2y = a \\ 3x - 2y = b \\ 2x + y = c \end{cases}.$$

Escalonando,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 3 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} L_1 \leftarrow -L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 3 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 0 & 4 & 3a + b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -a \\ 0 & 4 & 3a + b \\ 0 & 5 & 2a + c \end{bmatrix}.$$

Obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = \frac{3a+b}{4} \\ y = \frac{2a+c}{5} \end{cases} \Rightarrow 7.a + 5b - 4c = 0.$$

Logo, $S = \{(a, b, c) \in \mathfrak{R}^3 / 7.a + 5b - 4c = 0\}$.

c) Seja (a, b, c) um elemento do subespaço S gerado por A .

$$(d) \text{ Então, } (a, b, c) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) + z(-1, 1, 0)$$

Daí,

$$\begin{cases} x - z = a \\ y + z = b \\ x + y = c \end{cases} .$$

Escalonando,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -a + c \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a - b + c \end{bmatrix} .$$

Logo, $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + b - c = 0\}$.

10) Determine o valor de k para que o conjunto $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$ seja LI.

Solução.

Considere a equação

$$x(1, 0, -1) + y(1, 1, 0) + z(k, 1, -1) = (0, 0, 0). \text{ Daí, obtemos o sistema homogêneo}$$

homogêneo

$$\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ y + z = 0 \text{ ou } (2 - k)x = 0. \text{ Para que os vetores sejam LI, } x \text{ tem que} \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

ser zero, ou $k \neq 2$.

11) Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

- (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x\}$
- (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$
- (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$
- (d) $S = \{(x, y, x); x, y \in \mathbb{R}\}$
- (e) $S = \{(x, y, z, w); x - 3y + z = 0\}$
- (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$

Solução

(a) Se $(x, y, z) \in S \Rightarrow (x, y, z) = (x, 2x, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1)$. Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Como estes vetores são LI, o conjunto $\{(1, 2, 0) \text{ e } (0, 0, 1)\}$ é uma base de S .

(b) Se $(x, y) \in S \Rightarrow (x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$. Então, todo vetor de S é combinação linear do vetor $(1, -1)$. Como este vetor é LI, o conjunto $\{(1, -1)\}$ é uma base de S .

(c) Se $(x, y, z) \in S \Rightarrow (x, y, \frac{y-2x}{3}) = x(1, 0, -\frac{2}{3}) + y(0, 1, \frac{1}{3})$. Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 0, -\frac{2}{3})$ e $(0, 1, \frac{1}{3})$. Como estes vetores são LI, o conjunto $\{(1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, \frac{1}{3})\}$ é uma base de S .

(d) Se $(x, y, x) \in H \Rightarrow (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$. Então, todo vetor de H é combinação linear dos vetores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Como estes vetores são LI, o conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de H e $\dim H = 2$.

- (e) Se $(x, y, z, w) \in H \Rightarrow (x, y, z, w) = (x, y, 3y - x, w) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 3, 0) + w(0, 0, 0, 1)$. Então, todo vetor de H é combinação linear dos vetores $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 3, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Como estes vetores são LI, o conjunto $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 3, 0) \text{ e } (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de H e $\dim H = 3$.
- (f) Se $(x, y, z) \in H \Rightarrow (x, y, z) = (3y, y, -y) = y(3, 1, -1)$. Então, todo vetor de H é combinação linear do vetor $(3, 1, -1)$. Como estes vetores são LI, o conjunto $\{(3, 1, -1)\}$ é uma base de H e $\dim H = 1$.

12) Encontre a dimensão e o espaço gerado por:

- (i) $(1, -2, 3, -1)$ e $(1, 1, -2, 3)$
 (ii) 3 e -3
 (iii) $t^3 - 2t^2 + 5$ e $t^2 + 3t - 4$

Solução.

Dois vetores não nulos geram um espaço de dimensão 2 se eles são independentes e de dimensão 1 se são dependentes. Lembre que dois vetores são dependentes se, e somente se, um é múltiplo do outro. Portanto,

- (a) 2
 (b) 1
 (c) 2

13) Seja o conjunto $A = \{w_1, w_2\}$, sendo $w_1 = (-1, 3, -1)$ $w_2 = (1, -2, 4)$. Determine:

- (a) O subespaço S gerado pelo conjunto A .
 (b) O valor de k para que o vetor $w = (5, k, 1)$ pertença à S .

Solução.

(a) Para todo vetor $(x, y, z) \in S$, tem-se:

$(x, y, z) = a(-1, 3, -1) + b(1, -2, 4)$. Daí,

$$\begin{cases} -a + b = x \\ 3a - 2b = y \\ -a + 4b = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 3 & -2 & y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -x \\ 3 & -2 & y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 3x + y \\ -1 & 4 & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 3x + y \\ 0 & 3 & z - x \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x + y \\ 0 & 1 & 3x + y \\ 0 & 3 & z - x \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x + y \\ 0 & 1 & 3x + y \\ 0 & 0 & -10x - 3y + z \end{bmatrix}$$

O vetor $(x, y, z) \in S$ se, e somente se, o sistema tem solução, e isto ocorre quando $10x + 3y - z = 0$.

Logo, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 10x + 3y\}$.

(b) $(5, k, 1) \in S \Leftrightarrow 11 = 10 \cdot 5 + 3 \cdot k \Leftrightarrow k = -13$.

14) Considere $S = [(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)]$, o subespaço do \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $(2, 1, 0)$, $(1, -1, 2)$ e $(0, 3, -4)$. Determine sua equação.

Solução. Seja (a, b, c) um elemento de S .

Então, $(a, b, c) = x(2, 1, 0) + y(1, -1, 2) + z(0, 3, -4)$.

Daí,

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - y + 3z = b \\ 2y - 4z = c \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x + y = a \\ 3y - 6z = a - 2b \\ 0 = 2a - 4b - 3c \end{cases}$$

Logo, $W = \{(a, b, c) / 2a - 4b - 3c = 0\} = \{(a, b, \frac{2a - 4b}{3}) / a, b \in \mathbb{R}\}$.