UFF – Departamento de Análise

GAN00140 – Álgebra Linear – E1 - 2018.1 – Profa. Ana Maria Luz F. do Amaral

Lista de Exercícios 7 – Revisão para a prova

1- *Prove o teorema abaixo*

Teorema (Pitágoras)
Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2-

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - z = 0\}$

(a) Encontre uma base ortogonal para S (utilize processo de *Gram-Schmidt*).

(b) Considerando o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$, determine o complemento ortogonal ($S^\perp$) do subespaço S.

3-

Calcule o valor de m para que a matriz abaixo não tenha inversa (Use expansão por cofatores).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4- *Seja* $B = \begin{bmatrix} a & 2 & 13 & 5 \\ 0 & b & 4 & 6 \\ 0 & 0 & c & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Sabendo que det(B)=24 e que* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix}$. *Determine os valores de a, b e c.*

5-

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = -4 \\ x + 3z = a \end{cases}$$

(a) Seja A a matriz de coeficientes do sistema acima, através de operações elementares (método da triangulação) obtenha det(A).

*b) Abaixo temos o nosso Teorema * trabalhado em sala acrescido de mais equivalências considerando outros tópicos que trabalhamos no curso. Leias as equivalências:*

Teorema 6.4.5 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *admite somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(*d*) *A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.*
(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.
(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.
(*g*) $\det(A) \neq 0$.
(*h*) [redacted] (ainda não falamos)
(*i*) [redacted]
(*j*) *Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.*
(*k*) *Os vetores-linha de A são linearmente independentes.*
(*l*) *Os vetores-coluna de A geram o R^n.*
(*m*) *Os vetores-linha de A geram o R^n.*
(*n*) *Os vetores-coluna de A formam uma base do R^n.*
(*o*) *Os vetores-linha de A formam uma base do R^n.*
(*p*) *A tem posto n.*
(*q*) *A tem nulidade* 0.
(*r*) *O complemento ortogonal do espaço-nulo de A é o R^n.*
(*s*) *O complemento ortogonal do espaço-linha de A é* $\{\mathbf{0}\}$.
(*t*) $A^T A$ *é invertível.*

Com base na sua resposta do item a) e no Teorema acima, julgue se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

b1) Os vetores-linha de A forma uma base do IR^3 .( )

b2)A tem posto 2. ( )

b3) A tem nulidade 1. ( )

b4) Se $a-16\neq 0$ o sistema terá infinitas soluções. ( )

b5) O sistema homogêneo associado à A tem somente a solução trivial. ( )

b6) A matriz dos coeficientes A é uma matriz ortogonal. ( )

b7) trA=detA ( )

c) Encontre uma base para o espaço-coluna da matriz R obtida após o escalonamento de A.

d) Encontre uma base para o espaço-coluna de A.

e) Exibindo a análise proveniente da Regra de Cramer, verifique para quais valores de a o sistema acima é consistente e considerando este(s) valor(es) exiba o conjunto solução do sistema.

6- (Q10- ANPEC 2010)

Julgue as afirmativas:

⓪ $S = \{(x, y, x+y) \in IR^3 / x, y \in IR\}$ é um subespaço vetorial de IR^3 e a dimensão de S é 2;

① $\{(1,2,3), (4,5,12), (0,8,0)\}$ é base de IR^3;

② Se u, v e w são vetores linearmente independentes, então $v+w$, $u+w$ e $u+v$ são também linearmente independentes;

③ Se S é um subconjunto de IR^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais;

④ Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$.