UFF – Departamento de Análise

GAN00140 – Álgebra Linear – E1 - 2018.1 – Profa. Ana Maria Luz F. do Amaral

Lista de Exercícios 7 – Revisão para a prova (GABARITO)

~~1-~~ *Prove o teorema abaixo*

Teorema (Pitágoras)

Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \cancel{\langle x, y\rangle}^{0} + \cancel{\langle y, x\rangle}^{0} + \langle y, y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

~~2-~~

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - z = 0\}$

(a) Encontre uma base ortogonal para S (utilize processo de *Gram-Schmidt*).

$B' = \{(1,0,1), (-1,1,1)\}$ é obtido por Gram-Schmidt de $B = \{(1,0,1), (0,1,2)\}$

(b) Considerando o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$, determine o complemento ortogonal ($S^{\perp}$) do subespaço S.

$S^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) \perp S\} = \{(-z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

~~3-~~

Calcule o valor de m para que a matriz abaixo não tenha inversa (Use expansão por cofatores).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det A = 0 \Rightarrow A$ não é inversível

$\det A = -4 + 2m = 0 \Rightarrow m = 2$

4- Seja $B = \begin{bmatrix} a & 2 & 13 & 5 \\ 0 & b & 4 & 6 \\ 0 & 0 & c & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Sabendo que det(B)=24 e que* $\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix}}^{a=4,\ b=2}$. *Determine os valores de a, b e c.*

↳ $\det B = a \cdot b \cdot c \cdot 1 = 24$. Substituindo os valores de a e b obtem-se $c = 3$

5-

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= -4 \\ x + 3z &= a \end{cases}$$

(a) Seja A a matriz de coeficientes do sistema acima, através de operações elementares (método da triangulação) obtenha det(A).

$$\overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & a \end{array}\right]}^{A} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & a-16 \end{array}\right]}^{A'}$$

$\det(A') = \det A = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

(este sistema ou é inconsistente ou tem infinitas sol) *b) Abaixo temos o nosso Teorema * trabalhado em sala acrescido de mais equivalências considerando outros tópicos que trabalhamos no curso. Leias as equivalências:*

Teorema 6.4.5 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) *A é invertível.*
(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *admite somente a solução trivial.*
(c) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(d) *A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.*
(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(g) $\det(A) \neq 0$.
(h) [redacted] (ainda não falamos)
(i) [redacted]
(j) *Os vetores-coluna de A são linearmente independentes.*
(k) *Os vetores-linha de A são linearmente independentes.*
(l) *Os vetores-coluna de A geram o R^n.*
(m) *Os vetores-linha de A geram o R^n.*
(n) *Os vetores-coluna de A formam uma base do R^n.*
(o) *Os vetores-linha de A formam uma base do R^n.*
(p) *A tem posto n.*
(q) *A tem nulidade 0.*
(r) *O complemento ortogonal do espaço-nulo de A é o R^n.*
(s) *O complemento ortogonal do espaço-linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.*
(t) *$A^T A$ é invertível.*

Com base na sua resposta do item a) e no Teorema acima, julgue se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

b1) Os vetores-linha de A forma uma base do IR^3. (F)

b2) A tem posto 2. (V)

b3) A tem nulidade 1. (V) $N = 3 - 2 = 1$

b4) Se $a-16 \neq 0$ o sistema terá infinitas soluções. (F) $a - 16 \neq 0$ o sistema é impossível

b5) O sistema homogêneo associado à A tem somente a solução trivial. (F) tem infinitas soluções

b6) A matriz dos coeficientes A é uma matriz ortogonal. (F) Matriz ortogonal

↳ $A^{-1} = A^T \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1$ ou -1

b7) trA=detA (F)

$trA = 1 + 2 + 3 = 6 \neq \det(A)\ (=0)$

c) Encontre uma base para o espaço-coluna da matriz R obtida após o escalonamento de A.

$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B = \{r_1, r_2\}$

d) Encontre uma base para o espaço-coluna de A.

$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B = \{s_1, s_2\}$

e) Exibindo a análise proveniente da Regra de Cramer, verifique para quais valores de a o sistema acima é consistente e considerando este(s) valor(es) exiba o conjunto solução do sistema.

$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$

$\det A_1 = 48 - 3a$

$48 - 3a = 0$

$3a = 48 \qquad a = 16$

$\det A_2 = 2a - 32$

$2a - \cancel{3}2 = 0$

$a = 32/2 = 16$

$\det A_3 = a - 16$

$a - 16 = 0$

$a = 16$

Se $a=16$ $\det(A_i)=0\ \forall i$, como $\det A=0$ o sistema é compa indeterminado. Se $a\neq 16$ $\det(A_i)\neq 0$ e como $\det(A)=0$ o sistema é incompatível

~~6~~- (Q10- ANPEC 2010)

Julgue as afirmativas:

⓪ $S=\{(x,y,x+y)\in IR^3 / x,y\in IR\}$ é um subespaço vetorial de IR^3 e a dimensão de S é 2; (V)

① $\{(1,2,3),(4,5,12),(0,8,0)\}$ é base de IR^3; (F)

② Se u, v e w são vetores linearmente independentes, então $v+w$, $u+w$ e $u+v$ são também linearmente independentes; (V)

③ Se S é um subconjunto de IR^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais; (F)

④ Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x\neq 1$. (F)