UFF – Departamento de Análise
GAN00140 – Álgebra Linear – E1 – 2018.1 – Profª. Ana Maria Luz F. Amaral

Lista de Exercícios 8 - Transformações Lineares

1- Mostre que as funções abaixo são transformações lineares.

a) T:$IR^2 \to IR^2$ tal que $T(x,y) = (2x + y, x + 3y)$

b) T:$IR^2 \to IR^3$ tal que $T(x,y) = (x + y, x - y, x)$

c) T:$IR^3 \to IR^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y)$

2 - Considere a função Tr: M(n,n)→IR (traço) definida por Tr(A)=$a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$. Mostre que Tr é uma transformação linear.

3- Determine a transformação linear tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Encontre v pertencente a IR^2 tal que $T(v) = (5,3,2)$.

4- Uma editora publica um livro de Álgebra Linear em três edições diferentes: brochura, especial e de luxo. Cada livro precisa de uma determinada quantidade de papel e tela (para a capa). As quantidades necessárias (em gramas) são dadas pela matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Broch.} & \text{Espec.} & \text{Luxo} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} papel \\ tela \end{array}$$

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ o vetor produção, onde x_1 é o número de livros brochuras, x_2 é o número de livros especiais e x_3 é o número de livros de luxo.

a) Encontre a transformação linear T:$IR^3 \to IR^2$ definida por T(**x**)=A**x** que descreve o quanto de papel e tela foram gastos para produzir o livro.

b) O vetor $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$ informa em y_1 o total de papel gasto pela editora para publicar o livro e em y_2 o total de tela necessários. De acordo com o item a) Qual a expressão do total de papel gasto (expressão de y_1 em função de x_1, x_2, x_3)? Qual a expressão do total de tela necessária (expressão de y_2 em função de x_1, x_2, x_3)?

5- Seja T:V→W uma transformação linear, chama-se núcleo da transformação linear ao conjunto

N(T)={v∈V; T(v)=0}

a) Seja T:$IR^2 \to IR$ tal que T(x,y)=y-x, temos que

N(T)={(x,y) ∈ IR^2; T(x,y)=y-x=0}={(x,y) ∈ IR^2; y=x}.

Responda: (2,1) ∈ N(T)? (3,3) ∈ N(T)?

6- Seja T:V→W uma transformação linear, chama-se imagem da transformação linear ao conjunto

Im(T)={w∈W; w=T(v) para algum v∈V }

a) Seja T:$IR^2 \to IR^2$ tal que T(x,y)=(x+y,2x+2y), temos que

Im(T)={(a,b) ∈ IR^2; (a,b)=T(x,y)=(x+y,2x+2y)} $\Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases}$, para que este sistema tenha solução devemos ter 2a-b=0. Logo

$$Im(T)=\{(a,b) \in IR^2;\ 2a-b=0\}$$

Responda: (1,2) ϵ Im(T)? (6,3) ϵ Im(T)?

7- Seja $T: P_2(IR) \rightarrow P_2(IR)$ a transformação linear definida por

$$T(ax^2+bx+c)=(a+2b)x+(b+c)$$

a) $-4x^2+2x-2$ pertence a N(T)?
b) x^2+2x+1 pertence a Im(T)?
c) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
d) T é injetora?
e) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
f) T é sobrejetora?

8 - Seja $T: M_{2x2}(IR) \rightarrow M_{2x2}(IR)$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base para N(T)? Qual a dimensão de N(T)?
b) T é injetora?
c) Encontre uma base para Im(T)? Qual a dimensão de Im(T)?
d) T é sobrejetora?

9- Dada a transformação linear $T: IR^3 \rightarrow IR^3$ dada por

$$T(x,y,z)=(x+y,y-z),$$

E considere as bases A={(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)} e B={(3,0), (1,1)} para o IR^3 e IR^2 respectivamente. Determine:
a) $[T]_B^A$
b) Sendo v=(5,1,-2) (coordenadas em relação à base canônica do IR^3), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a) e lembrando que $[T(v)]_B=[T]_B^A\,[v]_A$.

10- Seja a transformação $T: IR^3 \rightarrow IR^2$ definida pela matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a lei que define a transformação linear.
b) Sejam $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $B=\{e_1,e_2\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^3 e IR^2. Encontre a matriz de T em relação a A e B ($[T]_B^A$) .

11- Sejam $T_1: IR^2 \rightarrow IR^3$ e $T_2: IR^2 \rightarrow IR^3$ transformações lineares definidas por:
$T_1(x,y)=(x+2y,\ 2x-y,\ x)$ e $T_2(x,y)=(-x,\ y,\ x+y)$
Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ e $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ as bases canônicas respectivamente do IR^2 e IR^3. Encontre:
a) $[T_1]_B^A$ e $[T_2]_B^A$
b) $[T_1+T_2]_B^A$

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$

12- Sejam $V=IR^2$, A={(1,1),(2,1)} e B={(1,0),(0,1)} bases do IR^2.
a) Determine a matriz de mudança de base de A para a base B (representada por $[I]_B^A$).
b) Que relação pode ser estabelecida entre $[v]_B$ e $[v]_A$ usando a matriz de I em relação às bases A e B?