Universidade Federal Fluminense/ Departamento de Análise
GAN 00140 –Álgebra Linear – Turma E1/ Professora Ana Maria Luz F. Amaral

Lista de Exercícios – Operadores Lineares

1- Seja $T:IR^2 \to IR^2$ um operador linear ortogonal definido por

$$T(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

e $B_1=\{e_1,e_2\}$ a base canônica do IR^2, encontre a partir de B_1 uma base ortonormal para o IR^2, usando o seguinte resultado:
"Um operador linear ortogonal T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é base ortonormal de V então $\{T(v_1),T(v_2), ...,T(v_n)\}$ é também base ortonormal de V"

2- Sejam $T_1: IR^2 \to IR^2$ e $T_2: IR^2 \to IR^2$ operadores lineares definidas por:

$$T_1(x,y)=(x+y, -x+y) \text{ e } T_2(x,y)=(x, -x)$$

Sejam $A=\{e_1, e_2\}$ base canônica do IR^2 e $B=\{(3,1),(-3,1)\}$ outra base do IR^2

a) $[T_1]_B^A$ e $[T_2]_B^A$

b) $[T_1+T_2]_B^A$ (dica: use que $[T_1+T_2]_B^A=[T_1]_B^A+[T_2]_B^A$)

c) $[3T_1-2T_2]_B^A$ (dica: use que $[3T_1-2T_2]_B^A=3[T_1]_B^A-2[T_2]_B^A$)

d) $[T_1 \circ T_2]_B^A$ (você pode usar que: $[T_1 \circ T_2]_B^A = [T_1]_B^A.[T_2]_B^A$)

3- Construa um exemplo do seguinte resultado: " A composta de duas transformações ortogonais é ortogonal, ou seja, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal".

4- A seguir dados operadores lineares T em IR^2. Verificar quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determinar uma fórmula para T^{-1}.

a) $T: IR^2 \to IR^2$, $T(x,y)=(3x-4y,-x+2y)$
b) $T: IR^2 \to IR^2$, $T(x,y)=(x-2y,-2x+3y)$
c) $T: IR^2 \to IR^2$, $T(x,y)=(2x-y,-4x+2y)$

5- Consideremos as seguintes bases do IR^2: $A=\{(1,1),(0,-1)\}$ e $B=\{(2,-3),(-3,5)\}$.
a) Determinar a matriz de mudança de base: $[I]_B^A$.
b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_B$, sendo $[v]_A=(2,3)$.
c) Determinar a matriz de mudança de base de B para A.

6- Seja $T: IR^2 \to IR^2$ um operador linear. Consideremos as bases A canônica e $B=\{(4,1),(-11,-3)\}$. Sabendo que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar $[T]_A$, utilizando a relação entre matrizes semelhantes.

7- Determinar a e b para os seguintes operadores no IR^3 sejam simétricos
a)$T: IR^3 \to IR^3$, $T(x,y,z)=(3x-2y,ax+y-3z,by+z)$
b)$T: IR^3 \to IR^3$, $T(x,y,z)=(x+2z,ax+4y+bz,2x-3y+z)$

8- Classifique as afirmações abaixo como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), caso sejam falsas reescreva a afirmação de forma a torná-la verdadeira.

a) Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais. ( )
b) Se A é uma matriz simétrica com todos os seus autovalores distintos então A não é diagonalizável. ( )
c) Se A é uma matriz simétrica, então autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. ( )
d) Se uma matiz simética A tem um autovalor λ_j com multiplicidade k_j então o espaço solução do sistema linear $(\lambda_j I_n - A)x=0$ (o autoespaço de λ_j) tem dimensão k_j. ( )
e) Se A é uma matriz simétrica então não existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP=D$, onde D é uma matriz diagonal com os autovalores de A como elementos da diagonal principal. ( )

9. Seja o operador linear $T: \Re^2 \to \Re^2$ tal que T(x,y) = (x + y, x –y).

(a) Determine $[T]_B$, onde B = {(1,2), (0,1)}.

(b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado v = (5, 3).

10. Verificar se o operador linear $T: \Re^3 \to \Re^3$ definido por T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0) e T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1) é inversível, e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

11. Mostrar que o operador linear, no $\Re^3$, definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível.

Determinar $v \in \Re^3$ tal que T(v) = (6, 9, 15).

12. A base B é obtida da base canônica A do $\Re^2$ pela rotação de $\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$. Calcular:

a) $[I]_B^A$ b) $[I]_A^B$

13. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A={(1, 3), (2, -4)} determine a base B.

14. Verifique se o operador $T: \Re^2 \to \Re^2$, definido por T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y) é inversível. Caso seja encontre uma fórmula para seu inverso.

15. Seja o operador linear $T: \Re^3 \to \Re^3$ tal que *T(x,y,z) = (2y+2z,2x+2z,2x+2y)*. Determinar uma base ortonormal β de $\Re^3$ tal que $[T]_\beta$ seja diagonal.

16. Encontre a inversa de cada uma das matrizes ortogonais a seguir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$