

Lista de Exercícios 9 – Gabarito

$$1- B_2 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$4- a) T^{-1}(x, y) = \left(x + 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \right)$$

$$b) T^{-1}(x, y) = (-3x - 2y, -2x - y)$$

c) T não é inversível

$$5- a) [I]_B^A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b) [v]_B = (7, 4)$$

$$c) [I]_A^B = ([I]_B^A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$6- [T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7- a) a = -2 \text{ e } b = -3$$

$$b) a = 0 \text{ e } b = -3$$

8

- a) Todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais. (V)
- b) Se A é uma matriz simétrica com todos os seus autovalores distintos então A não é diagonalizável. (F) . **O correto é:** Se A é uma matriz simétrica com todos os seus autovalores distintos então A é diagonalizável
- c) Se A é uma matriz simétrica, então autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. (V)
- d) Se uma matriz simétrica A tem um autovalor λ_j com multiplicidade k_j então o espaço solução do sistema linear $(\lambda_j I_n - A)x = 0$ (o autoespaço de λ_j) tem dimensão k_j . (V)
- e) Se A é uma matriz simétrica então não existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal com os autovalores de A como elementos da diagonal principal. (F) **O correto é:** Se A é uma matriz simétrica então existe uma matriz ortogonal P...

9. Seja o operador linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

(a) Determine $[T]_B$, onde $B = \{(1, 2), (0, 1)\}$.

(b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado $v = (5, 3)$.

Solução. (a) $T(1, 2) = (3, -1)$, $T(0, 1) = (1, -1)$; $(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$

$$T(1, 2) = (3, -1) = 3(1, 2) + (-7)(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, -1) = 1(1, 2) + (-3)(0, 1). \text{ Logo, } [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como, $[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$.

10. Verificar se o operador linear $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definido por $T(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $T(-2, 1, 0) = (0, -1, 0)$ e $T(-1, -3, -2) = (0, 1, -1)$ é inversível, e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Solução. Observe que o conjunto $\{(1, 1, 1), (-2, 1, 0), (-1, -3, -2)\}$ é uma base de \mathfrak{R}^3 e T está bem definido, pois conhecemos suas imagens. Então, por definição de

$$T^{-1}, T^{-1}(1, 0, 0) = T^{-1}(x, y, z) = x T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1).$$

Observando que $\{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ é também uma base de \mathfrak{R}^3 , pois são LI (

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \right) \text{ e que as imagens desses vetores são conhecidas, o operador } T^{-1} \text{ está}$$

definido. Logo, existindo a T^{-1} , T é inversível.

Vamos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Expressando (x, y, z) em relação a esta base,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + (-y-z)(0, -1, 0) + (-z)(0, 1, -1), \text{ logo,}$$

$$T^{-1}(x, y, z) = x T^{-1}(1, 0, 0) + (-y-z)T^{-1}(0, -1, 0) + (-z)T^{-1}(0, 1, -1)$$

$$T^{-1}(x, y, z) = x(1, 1, 1) + (-y-z)(-2, 1, 0) + (-z)(-1, -3, -2)$$

$$T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y + 2z, x + 2z).$$

11. Mostrar que o operador linear, no \mathfrak{R}^3 , definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível.

Determinar $v \in \mathfrak{R}^3$ tal que $T(v) = (6, 9, 15)$.

Solução. Como $\det [T] = 0$, T não é inversível.

$$\text{Se } v = (x, y, z), [T(v)] = [T] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}. \text{ Daí,}$$

$$v = (z, 3 - 2z, z), z \in \mathfrak{R}.$$

12. A base B é obtida da base canônica A do \mathfrak{R}^2 pela rotação de $\frac{\pi}{3}$ rad. Calcular:

a) $[I]_B^A$

b) $[I]_A^B$

Solução. Se $B = (b_1, b_2)$, $b_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ e

$b_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. $(1, 0) = a \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1/2$ e

$b = -\sqrt{3}/2$; $(0, 1) = c \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \sqrt{3}/2$ e $d = 1/2$. Logo,

$[I]_B^A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; $[I]_A^B = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

13. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e $A = \{(1, 3), (2, -4)\}$ determine a base B.

Solução. $B = \{(a, b), (c, d)\}$

$(1, 3) = -7(a, b) - 11(c, d)$, $(2, -4) = 6(a, b) + 8(c, d)$. Logo, $B = \{(3, -2), (-2, 1)\}$.

14. Verifique se o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (3x+5y, 2x+3y)$ é inversível. Caso seja encontre uma fórmula para seu inverso.

Solução. Sendo $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\det[T] = -1 \neq 0$. Logo, T é inversível.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow T^{-1}(x, y) = (-3x+5y, 2x-3y).$$

15. O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$ de modo que os autovalores são: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 4$. Então -2 é um autovalor com multiplicidade 2. A seguir, para encontrar os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , resolve-se o sistema linear $(-2I_3 - A)x = 0$, uma base para o espaço solução deste sistema linear é $v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$, que não são ortogonais, podemos usar o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3 - A)x = 0$ (o autoespaço de $\lambda_1 = -2$). De modo que obtemos $u_1 = (1/\sqrt{2})(-1, 1, 0)$ e $u_2 = (1/\sqrt{6})(-1, -1, 2)$. O conjunto $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal para o espaço solução de $(-2I_3 - A)x = 0$. Além disso tem-se que $v_3 = (1, 1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_3 = 4$, normalizando este vetor obtemos $u_3 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$. Como autovalores associados a autovetores distintos são ortogonais temos que u_3 é ortogonal a u_1 e u_2 . Logo $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 . A matriz P cuja j-ésima coluna é u_j é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ e é tal que } P^{-1}=P^T \text{ (P é ortogonal). Além disso}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [T]_{\beta}.$$

16. Como as matrizes em a) e b) são ortogonais basta achar as transpostas pois $A^T=A^{-1}$ e $B^T=B^{-1}$.