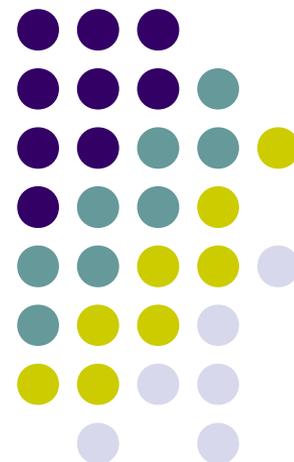


Álgebra Linear

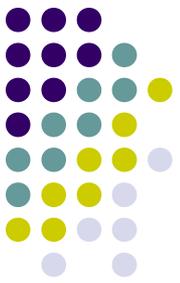
2018.1

Aula 17:

Transformações lineares (continuação)/
Matriz de Mudança de Base/
Exercícios



Matriz de uma transformação linear



Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W . Sem perda de generalidade consideremos $\dim V=2$ e $\dim W=3$.

Sejam $A=\{v_1, v_2\}$ e $B=\{w_1, w_2, w_3\}$, um vetor $v \in V$ pode ser expresso como

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad (1) \quad \text{Note que } [v]_A = (x_1, x_2)$$

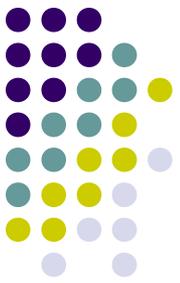
A imagem $T(v) \in W$ pode ser expressa como

$$T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 \quad (2) \quad \text{Note que } [T(v)]_B = (y_1, y_2, y_3)$$

Por outro lado aplicando T em (1) obtemos

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) \quad (3)$$

Matriz de uma transformação linear



Sendo $T(v_1)$ e $T(v_2) \in W$ eles são combinações lineares dos vetores de B :

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \quad (4)$$

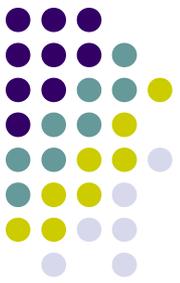
$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \quad (5)$$

Substituindo em (3) temos que

$$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$$

$$T(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)w_3$$

Matriz de uma transformação linear



Portanto:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

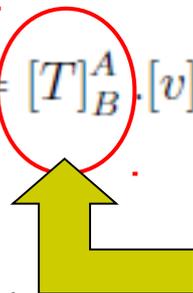
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

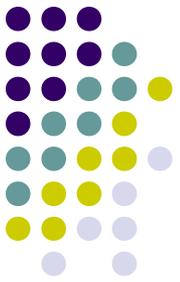
Ou simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A,$$



Matriz de T em relação as bases A e B

Matriz de uma transformação linear

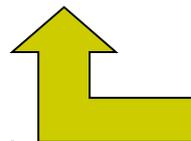


Na prática o que fizemos:

- 1) Escrevemos os vetores $T(v_1)$ e $T(v_2)$ como combinação linear do vetores de B
- 2) Tomamos os escalares de $T(v_i)$ na base B e os colocamos como a coluna i da matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{[T(v)]_B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[v]_A}$$

The matrix $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ is circled in red. Brackets below the matrix identify the columns as $[T(v_1)]_B$ and $[T(v_2)]_B$.



Matriz de T em relação as bases A e B

Matriz de uma transformação linear



Exemplo: Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

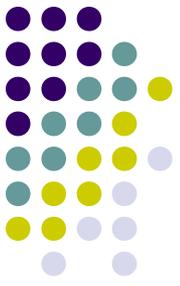
$$T(x,y) = (x+y, x-y, y),$$

E considere as bases $A = \{(1,1), (-1,0)\}$ e $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ para o \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente. Determine:

a) $[T]_B^A$

b) Sendo $v = (5,1)$ (coordenadas em relação à base canônica do \mathbb{R}^2), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a)

Matriz de Mudança de Base



Se considerarmos $I: V \rightarrow V$ a transformação linear identidade,

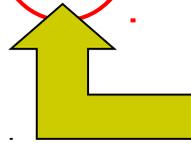
$$I(v) = v.$$

Ao escrevermos a matriz desta transformação em relação às bases A e B (A uma base de V e B outra base de V). Obteremos

$$[I(v)]_B = [I]_B^A [v]_A$$

Ou ainda:

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A$$



Matriz de mudança de base de A para base B

O papel desta matriz é transformar as coordenadas de um vetor v na base A em coordenadas do mesmo vetor v na base B .