Álgebra Linear 2018.1

Aula 17:

Transformações lineares (continuação)/ Matriz de Mudança de Base/

Exercícios

Matriz de uma transformação linear

Sejam T: V→W uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W. Sem perda de generalidade consideremos dim V=2 e dim W=3.

Sejam A={v_1,v_2} e B={w_1,w_2,w_3}, um vetor v є V pode ser expresso como

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad (1)$$

Note que $[v]_A=(x_1,x_2)$

A imagem T(v) є W pode ser expressa como

$$T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 \quad (2)$$

Note que $[T(v)]_B=(y_1,y_2,y_3)$

Por outro lado aplicando T em (1) obtemos

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) \quad (3)$$

Matriz de uma transformação linear

Sendo T(v_1) e T(v_2) ϵ W eles são combinações lineares dos vetores de B:

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \quad (4)$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \quad (5)$$

Substituindo em (3) temos que

$$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$$

$$T(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)w_3$$

Matriz de uma transformação linear

Portanto:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A.[v]_A,$$

Matriz de T em relação as bases A e B

Matriz de uma transformação linear

Na prática o que fizemos:

1) Escrevemos os vetores $T(v_1)$ e $T(v_2)$ como combinação linear do vetores de B
2) Tomamos os escalares de $T(v_i)$ na base B e os colocamos como a coluna i da matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{[T(v)]_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}_{[T(v_1)]_B \;\; [T(v_2)]_B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[v]_A}$$

Matriz de T em relação as bases A e B

Matriz de uma transformação linear

Exemplo: Dada a transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ dada por

$$T(x,y)=(x+y,x-y,y),$$

E considere as bases A={(1,1),(-1,0)} e B={(1,0,0), (0,1,0),(0,0,1)} para o IR^2 e IR^3 respectivamente. Determine:

a) $[T]_B^A$

b) Sendo v=(5,1) (coordenadas em relação à base canônica do IR^2), calcular $[T(v)]_B$ utilizando a matriz encontrada em a)

Matriz de Mudança de Base

Se considerarmos I: V→V a transformação linear identidade,

$$I(v)=v.$$

Ao escrevermos a matriz desta transformação em relação às bases A e B (A uma base de V e B outra base de V). Obteremos

$$[I(v)]_B = [I]_B^A \, [v]_A$$

Ou ainda:

$$[v]_B = [I]_B^A \, [v]_A$$

Matriz de mudança de base de A para base B

O papel desta matriz é transformar as coordenadas de um vetor *v* na base A em coordenadas do mesmo vetor *v* na base B.